Examen MA 26A, 2003/1, M. del Pino

Tiempo: 3 hrs.

1. Mediante el método de valores y vectores propios generalizados encuentre la solución general del sistema

$$\vec{\mathbf{x}}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}$$

2. (a) Resuelva el sistema

$$\vec{\mathbf{x}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \vec{\mathbf{x}}$$

y grafique en modo preciso sus trayectorias, indicando ejes principales y con flechas la direccion en la cual las trayectorias son recorridas.

(b) Considere el sistema

$$x' = y, \quad y' = x - x^3.$$

Pruebe que toda solución $(x(t), y(t))$ del sistema satisface

$$\frac{1}{2}y^2 = E + \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{4}x^4$$

para cierta constante E. Identifique puntos de equilibrio del sistema y grafique en modo preciso sus trayectorias, indicando con flechas la direccion en la cual son recorridas.

3. (a) Sea $f : [0, \infty) \to \mathbf{R}^+$ una función positiva, continuamente diferenciable que satisface la desigualdad

$$f'(t) \leq -\mu f(t) + f(t)^\alpha$$

donde $\mu > 0$ y $\alpha > 1$. Demuestre que si $-\mu f(0) + f(0)^\alpha < 0$ entonces $-\mu f(t) + f(t)^\alpha < 0$ para todo $t > 0$. Concluya que $\lim_{t \to +\infty} f(t)$ existe y que es igual a cero.

(b) Considere el sistema 2×2 de primer orden

$$x_1' = -\lambda_1 x_1 + f_1(x_1, x_2)$$

$$x_2' = -\lambda_2 x_1 + f_2(x_1, x_2)$$

donde $\lambda_1 > 0,\ \lambda_2 > 0.$ y además f_1 y f_2 son funciones continuas en $\mathbf{R}^2$ que satisfacen

$$|f_1(x_1, x_2)| + |f_1(x_1, x_2)| \leq x_1^2 + x_2^2.$$

Multiplique la primera exuación por x_1, la segunda por x_2 y ayúdese de la parte (a) para demostrar que existe $\delta > 0$ tal que si $(x_1(t), x_2(t))$ es una solución de este sistema en $[0, \infty)$ con $|x_1(0)| + |x_2(0)| < \delta$, entonces

$$\lim_{t \to +\infty} (x_1(t), x_2(t)) = (0, 0).$$

Se dice que $(0, 0)$ es un punto de equilibrio *asintóticamente estable* del sistema.