Departamento de Ingeniería Matemática. U. de Chile.
EXAMEN MA–26A Sección 01
ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS
Semestre 99-2. Prof.: Axel Osses, Aux.: Pedro Jara.

P1.– Sean y_1 e y_2 dos soluciones de la ecuación homogénea

$$y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0, \qquad x \in I\!R,$$

con $y_1(0) = 1$, $y_1'(0) = 0$, $y_2(0) = 0$, $y_2'(1) = 1$. Las funciones a_0 y a_1 son continuas. Note que y_1 e y_2 existen, son únicas y continuamente diferenciables. Nos proponemos demostrar que los ceros de y_1 e y_2 son alternados.

(i) (1 pto) Demuestre que y_1 e y_2 son linealmente independientes.

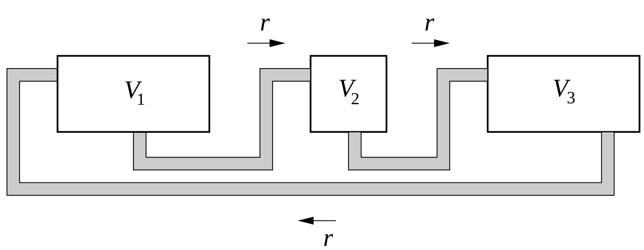
(ii) (3 ptos) Suponga que a y b son dos ceros sucesivos de y_2, esto es, $y_2(a) = 0$, $y_2(b) = 0$ e $y_2(x) \neq 0$ si $x \in]a, b[$. Demuestre que existe $c \in]a, b[$ tal que $y_1(c) = 0$.

Hint: Considere el signo constante del Wronskiano, el hecho que $y'(a)$ e $y'(b)$ tienen signos opuestos y el hecho que una función continua con valores de signos opuestos en a y b se anula en algún punto de $]a, b[$.

(iii) (2 ptos) Demuestre que c es el **único** cero de y_1 en $]a, b[$.

Hint: Razone por contradicción y utilice **(ii)** intercambiando roles de y_1 e y_2.

P2.– Considere el sistema cerrado de tres tanques de salmuera con volúmenes $V_1 = 50\,m^3$, $V_2 = 25\,m^3$ y $V_3 = 50\,m^3$ de la figura, entre los cuales existe un flujo $r = 10\,m^3/min$.



(i) (1 pto) Escriba el sistema de ecuaciones diferenciales para las cantidades de sal $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en los tres tanques de salmuera en el tiempo t. Use la notación $k_i = r/V_i$, $i = 1, 2, 3$.

(ii) (3 ptos) Encuentre $x_1(t)$, $x_2(t)$ y $x_3(t)$ en función de $x_1(0)$, $x_2(0)$ y $x_3(0)$.

(iii) (2 ptos) Si $C(t) = x_1(t) + x_2(t) + x_3(t)$ es la cantidad total de sal del sistema, muestre que $C(t)$ es constante e igual a $C(0)$ y que

$$\lim_{t\to\infty} x_1(t) = \frac{2}{5}C(0), \qquad \lim_{t\to\infty} x_2(t) = \frac{1}{5}C(0), \qquad \lim_{t\to\infty} x_3(t) = \frac{2}{5}C(0).$$

Así, a medida que $t \to \infty$ la sal en el sistema se acerca a una distribución estacionaria con 40% de sal en cada uno de los tanques de $50\,m^3$ y 20% en el tanque de $25\,m^3$.

P3.– Considere el siguiente modelo en que x e y representan las poblaciones de dos especies en competencia:

$$x' = 60x - 4x^2 - 3xy \tag{3a}$$

$$y' = 42y - 2y^2 - 3xy \tag{3b}$$

(i) (1 pto) Demuestre que los puntos críticos del sistema (3) son $C_1 = (0,0)$, $C_2 = (0,21)$, $C_3 = (15,0)$ y $C_4 = (6,12)$. Determine las linealizaciones de (3) en torno a sus puntos críticos y pruebe que el sistema (3) es casi-lineal en torno a sus puntos críticos.

(ii) (2 ptos) Determine el tipo y estabilidad de los puntos críticos de (3) a partir de las características de los sistemas linealizados.

(iii) (2 ptos) Esboce una aproximación del diagramas de fases de (3) cerca de los puntos críticos indicando claramente la dirección del tiempo y aproximadamente la dirección de las rectas tangentes y/o asíntotas.

(iv) (1 pto) Esboce el diagrama de fases global para $x \geq 0$ e $y \geq 0$. A partir de éste, justifique la profecía siguiente: *inexorablemente una de ambas especies esta condenada a la extinción.*

Feliz 2000!