

MA26A-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen
Prof. Manuel del Pino
Profs. Auxiliares:
Alejandro Om'on
Manuel Reyes.

1. (a) Sea $f : R \rightarrow R$ continua. Considere una ecuación de primer orden de la forma

$$\frac{dy}{dx} = f\left(\frac{y}{x}\right), \quad x > 0.$$

Considere el cambio de variable $z(x) = y(x)/x$. Muestre que z satisface la ecuación

$$xz' + z = f(z),$$

y que esta ecuación es de variables separables.

- (b) Use (a) para resolver la ecuación

$$\frac{dy}{dx} = \frac{x+y}{x-y}$$

2. (a) Mediante transformada de Laplace, encuentre la solución de

$$y'' + 2y' + 5y = 3e^{-x} \sin x, \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 3.$$

- (b) Resuelva la ecuación integral

$$y(x) = e^{-x} - 2 \int_0^x \cos(x-t)y(t) dt.$$

3. (a) Dibuje las trayectorias del sistema siguiente, indicando con precisión posibles trayectorias rectilneas.

$$\dot{x} = -3x + 2y, \quad \dot{y} = -2x + y.$$

- (b) Analice, mediante el paso a coordenadas polares, el tipo de punto singular de $(0,0)$ en el sistema

$$\dot{x} = y + x^3 + xy^2, \quad \dot{y} = -x + x^2y + y^2.$$

4. Sea A una matriz $n \times n$. Considere el sistema $\dot{x} = Ax$. Sea $W(t)$ la matriz fundamental del sistema con $W(0) = I_n$, la matriz identidad. Demuestre que A y $W(t)$ conmutan, esto es,

$$AW(t) = W(t)A, \quad \forall t.$$

Indicación: Encuentre la ecuación satisfecha por $M(t) = AW(t) - W(t)A$.