Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Fisicas y Matematicas
Departamento de Ingenieria Matematica

Examen Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otono 99
Profesor Manuel del Pino

1. Considere el sistema $\vec{x}\,' = A\vec{x}$ donde A es la matriz de 4×4

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Encuentre valores y vectores propios generalizados de esta matriz, y utilicelos para encontrar la solucion $\vec{x}(t)$ del sistema tal que

$$\vec{x}(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 2 \end{bmatrix}$$

2. (a) Sean $\vec{x_1}(t), \vec{x_2}(t)$ dos soluciones del sistema $\vec{x}\,' = A(t)\vec{x}$, donde $A(t)$ es una matriz $N \times N$, de coeficientes continuos en $\Re$. Muestre que si los vectores de $\Re^N$ $\vec{x_1}(0)$ y $\vec{x_2}(0)$ son paralelos, entonces los vectores $\vec{x_1}(t)$ y $\vec{x_2}(t)$ son paralelos, en todo $t \in \Re$.

   (b) Considere el sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} x'' + y'' + 2x' + y' + 3x + y &= 0 \\ y''' + x' + y' + 2y'' + y &= 0 \end{aligned}$$

   Reduzca este sistema a un sistema de primer orden equivalente, y deduzca (sin resolver) que existe una unica solucion $(x(t), y(t))$ tal que

$$x(0) = x'(0) = y(0) = y'(0) = y''(0) = 1$$

3. Las ecuaciones de movimiento de una cuerda con extremos fijos en un eje en torno al cual esta rota, y que esta sometida a una fuerza externa, conducen al estudio de un problema lineal de condiciones de borde, de la forma

$$\begin{aligned} y'' + \lambda y &= f(t), \qquad t \in [0,\pi] && (1) \\ y(0) = y(\pi) &= 0 && (2) \end{aligned}$$

donde f es una funcion continua en $[0,\pi]$ y λ una constante positiva.

(a) Use la formula de variacion de parametros para mostrar que la funcion

$$y_p(t) = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} \int_0^t \sin(\sqrt{\lambda}(t-s)) f(s)\, ds$$

es una solucion particular de la ecuacion (1).

(b) Demuestre que si $\lambda > 0$ *no es* el cuadrado de un numero entero, entonces el problema (1)-(2) posee solucion y esta solucion es unica.

(c) Demuestre que si $\lambda = n^2$ para algn entero positivo n, entonces el problema (1)-(2) posee solucion si y solo si

$$\int_0^\pi \sin(ns) f(s)\, ds = 0.$$

Hint: Use la solucion particular en (a) en una representacion de la solucion general de la ecuacion (1) para probar las afirmaciones (b) y (c). Este resultado (b)-(c), conocido como "la Alternativa de Fredholm", se generaliza a una amplia familia de problemas de condiciones de borde.