MA26A-Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Examen
Prof. Ra'ul Manasevic

1. Sean $a > 0$ fijo y el problema

$$\begin{aligned} x' &= ax + y \\ y' &= \delta x \\ x(0) &= x(T) = 0 \end{aligned}$$

Encuentre δ en funci'on de a tal que el problema tenga soluciones no triviales. Es decir, demuestre que existe una sucesi'on $\{\delta_k\}$ tal que $\delta_k \to -\infty$, de tales δ.
Encuentre las correspondientes funciones $\{x_k\}$ e $\{y_k\}$ soluciones del problema.

2. Resuelva el sistema $x' = Ax + b(t)$ donde

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}; \qquad b(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ t \\ 2e^t \end{bmatrix}$$

Encuentre la soluci'on tal que $x(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

3. Considere el sistema $x' = Ax$ donde

$$[T_e] = A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 10 & 15 \\ 16 & 2 & 40 & 5 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 16 & 2 \end{bmatrix}$$

$[\ ]_e$ significa el operador representado en la base can'onica. Recordando que $T = S + N$, S semisimple y N nilpotente, encontrar una base real B donde $[S]_B = \Lambda$ (con la notaci'on usual para B y Λ).
Evaluar luego $e^{\Lambda t}$.

4. Sean u, v soluciones no triviales respectivamente de las ecuaciones

$$\begin{aligned}(p(t)u')' + q(t)u &= 0\\ (p_1(t)v')' + q_1(t)v &= 0\end{aligned}$$

donde $p, p_1, q, q_1; R \to R$ son funciones continuas tales que $p(t) \geq p_1(t) > 0; \quad q_1(t) \geq q(t)$.
a) Supongamos que v no se anula en el abierto (t, t_2). Demuestre que entonces

$$\frac{d}{dt}[\frac{u}{v}(p(t)u'v - p_1(t)uv)] = (q_1 - q)u^2 + (p - p_1)u'^2 + p_1\frac{(u'v - uv')^2}{v^2}$$

b) Demuestre que si $u(t_1) = u(t_2) = 0, \; v(t) \neq 0, \quad t \in (t_1, t_2)$, entonces

$$\int_{t_1}^{t_2}(q_1 - q)u^2dt + \int_{t_1}^{t_2}(q_1 - q)u'^2dt + \int_{t_1}^{t_2} p_1\frac{(u'v - uv')^2}{v^2} = 0$$

Justifique la respuesta, es decir $v(t) \neq 0$ pero s'olo para $t \in (t_1, t_2)$ ¿Qu'e pasa en los extremos?

c) Si $t_1 < t_2$ son dos ceros consecutivos de u, demuestre que v debe anularse una vez en el intervalo (t_1, t_2), a menos que exista un $c \neq 0$ tal que $v = cu$ en (t_1, t_2). En este 'ultimo caso demuestre que $q(t) = q_1(t)$ en (t_1, t_2).