Examen

MA26A-03

Semestre 95/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Manuel Reyes

Pregunta 1. Esboce el diagrama de fase asociado a la siguiente ecuación

$$x'' + x^3 - x = 0.$$

Pregunta 2.
a) De la forma de la solución general de

$$D^2(D^2+1)y = 1 + 2xe^x.$$

b) i) Resuelva usando transformada de Laplace la siguiente ecuación

$$m\ddot{x} + k\,x = h(t),$$

$$x(0) = \dot{x}(0) = 0,$$

donde $h(t) = 0$ si $t \leq a$, $h(t) = \frac{1}{\epsilon}$ si $a < t < a + \epsilon$ y, $h(t) = 0$ si $t \geq a + \epsilon$.

ii) Pruebe que $\lim_{\epsilon \to 0} x(t)$ satisface la ecuación

$$m\ddot{x} + k\,x = 0,$$

$$x(a) = 0, \quad \dot{x}(a) = \frac{1}{m}.$$

iii) Interprete físicamente este hecho.

Pregunta 3.
a) Considere el sistema $x' = -\nabla V(x)$, con $V : R^n \to R$ de clase C^2. Queremos estudiar la estabilidad de los puntos críticos de este sistema.
i) Pruebe que si $x(t)$ es solución del sistema, entonces $V(x(t))$ es decreciente.
ii) Pruebe que si $\bar{x}$ es un mínimo aislado, es decir existe una bola $B_\epsilon(\bar{x})$ tal que $V(x) > V(\bar{x})$ para todo $x \in B_\epsilon(\bar{x}) \setminus \{\bar{x}\}$, entonces $\bar{x}$ es un punto de equilibrio asintóticamente estable.
Indicación. Considere la función $E(x) = V(x) - V(\bar{x})$.

b) Considere la ecuación $\ddot{x} + a\dot{x} + f(x) = 0$ con $a > 0$, $f : R \to R$ de clase C^1, $f(0) = 0$ y $x\,f(x) > 0$ para todo $x \neq 0$.
Pruebe que la solución nula es asintóticamente estable.

Pregunta 4. Considere la ecuación $y' = \sqrt{|y|}$ con $y(0) = 0$. Pruebe que existen por lo menos dos soluciones para esta ecuación.
¿Contradice el teorema de existencia y unicidad ?. Justifique.