Guía MA26A

Prof. Manuel del Pino
Aux. C. Contardo, J. Escobar

Motivación y Aplicaciones

1. Una curva pasa por el origen del primer cuadrante en el plano XY. El área bajo la curva desde el origen hasta un punto (a, b), con a y b reales positivos arbitrarios, es un tercio del área del rectángulo que tiene a estos puntos como vértices opuestos. Encuentre la curva.

2. Determine la curva que se encuentra por encima del eje x y que tiene la propiedad de que la longitud del arco que une dos puntos cualesquiera de ella es proporcional al área de dicho arco.

3. Un tanque contiene S libras de sal disuelta en 200 galones de agua. En el instante $t = 0$ entra agua que contiene media libra de sal por galón, con un gasto de 4 gal/min, y la solución homogenizada sale del depósito con la misma intensidad. Determine la concentración de sal en el tanque para todo tiempo $t > 0$.

4. Considere una cuerda cuya densidad lineal de masa es constante. Encuentre la forma que toma la cuerda cuando cuelga de los dos extremos.

5. Considere un paracaidista de masa m que desciende a la tierra a una velocidad $v(t)$. Experimentos indican que una buena aproximación de la fuerza de resistencia al avance ejercida por el paracaídas es kv^2, para cierta constante positiva k. Suponga que $v_0 > 0$ es la velocidad en el instante $t = 0$ de apertura del paracaídas. Despreciando el roce con el aire, encuentre la velocidad de caída en cualquier instante anterior a la llegada a la tierra. Si la caída se produce durante un tiempo suficientemente largo, muestre que la velocidad de llegada a la tierra es aproximadamente constante, independiente de la velocidad inicial.

6. Un isótopo radiactivo se desintegra a una tasa proporcional a la masa del isótopo presente.
   (i) Si $x(t)$ representa la masa del isótopo al instante t, pruebe que $x(t) = x(0)e^{-\lambda t}$, para alguna constante λ (llamada constante de desintegración).
   (ii) El tiempo T en el que la masa se reduce a la mitad se denomina *vida media* del isótopo. Sabiendo que la vida media del carbono 14 radiactivo es de 5600, determine la masa restante del carbono 14 al

cabo de un tiempo t, si inicialmente la masa de la muestra era x_0.
(iii) Si se sabe que el 2100 habrá decaído el 90 por ciento del carbono 14 presente en un cráneo encontrado en el valle central de Chile, determine la fecha de nacimiento del cabernícola a quien perteneció este cráneo.

7. Un cohete de masa estructural m_1 contiene combustible de masa inicial m_2. Se dispara en linea recta hacia arriba, desde la superficie de la tierra, quemando combustible a tasa constante ($\frac{dm}{dt} = -a$, donde m es la masa variable total del cohete y a un real positivo) y expulsando los productos de escape hacia atrás a una velosidad constante b en relación al cohete. Despreciando todas las fuerzas exteriores, excepto la gravitacional, encuentre la velocidad alcanzada en el momento que se agota el combustible.

Ecuaciones de Primer Orden

1. Obtenga una función $M(x, y)$, de modo que el siguiente problema sea exacto

$$M(x, y)dx + (xe^{xy} + 2xy + \tfrac{1}{x})dy = 0.$$

2. Demuestre que cualquier ecuación diferencial separable de primer orden es también exacta.

3. Resuelva los siguientes problemas:
   a. $e^y dx + (xe^y + 2y)dy = 0.$
   b. $(y - x^3)dx + (x + y^3)dy = 0.$
   c. $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0.$
   d. $xdy = (x^5 + x^3y^2 + y)dx.$
   e. $(y + x)dy = (y - x)dx.$
   f. $\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} + \frac{x-1}{2y}$, $y(1) = 1.$

4. Una función $f(x, y)$ se dice *homogénea de grado* n, si

$$f(tx, ty) = t^n f(x, y)$$

para todos los x, y, t adecuadamente restringidos. Muestre que la ecuación

$$M(x, y)dx + N(x, y)dy = 0$$

, donde M y N son homogéneas del mismo grado, puede escribirse como

$$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

donde f es una función homogénea de grado 0. Para resolver esta ecuación, defina $z = y/x$. Determine la ecuación satisfecha por z y resuélvala. Finalmente determine la función y.

5. Resuelva la ecuación diferencial

$$\tfrac{dy}{dx} = (2 + \tfrac{y}{x})^2.$$

6. La ecuación diferencial $y(4xy + 3)dx + x(3xy + 2)dy = 0$ admite un factor integrante $\lambda = x^n y^m$. Determine n y m y resuelva la ecuación.

7. (i) Suponga que se conoce una solución $S(x)$ de la *ecuación de Ricatti*

$$\tfrac{dy}{dx} = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x).$$

Muestre que la sustitución $y(x) = S(x) + \frac{1}{z(x)}$ genera una ecuación lineal para z.
(ii) Resuelva el problema de valor inicial

$$x\tfrac{dy}{dx} = y^2 + y - 2, y(1) = 3.$$

8. Resuelva
a. $x\frac{dy}{dx} - 3y = x^4$.
b. $y' + y = 2xe^{-x} + x^2$.
c. $xy'' - y' = 3x^2$.
d. $xy' - 3y = x^4$.

9. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(t, y) \to f(t, y)$ una función continua, tal que $\frac{\partial f}{\partial y}(t, y)$ es también continua. Suponga que f es periódica de período 1 en su primera variable, esto es,

$$f(t + 1, y) = f(t, y) \ \ \forall (t, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Suponga que $y = \varphi(t)$ es una solución en todo $\mathbb{R}$ de la ecuación

$$\tfrac{dy}{dt} = f(t, y),$$

que satisface $\varphi(1) = \varphi(0)$. Demuestre que $\varphi(t + 1) = \varphi(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$, es decir, φ es periódica de período 1.