Guía 2 MA26A

Prof. M. del Pino
Aux. C. Contardo, J. Escobar

Wronskiano y Soluciones Fundamentales

1. Suponga que f_1 y f_2 son funciones linealmente independientes (l.i.) en cierto intervalo I. Muestre que $f_1 - f_2$, $f_1 + f_2$ son tambien l.i. en el intervalo I.

2. Sean x_1, x_2 soluciones de una ecuación lineal homogénea de segundo orden con coeficientes no necesariamente constantes. Muestre que son linealmente dependientes (l.d) si tienen un cero en común o bien tienen un máximo o un mínimo en común.

3. Sean x_1 y x_2 en el conjunto fundamental de la ecuación del problema anterior definida en todo $\mathbb{R}$. Demuestre que hay un cero de x_1, y sólo uno, entre dos ceros consecutivos de x_2.

4. Muestre que x^2 y $x|x|$ son l.i. en $\mathbb{R}$ pero su Wronskiano es idénticamente nulo. Explique.

5. Sea f una función diferenciable estricatmente positiva en un intervalo I. Muestre que $f(x)$ y $xf(x)$ son linealmente independientes.

6. Considere la ecuación de los problemas

$$y'' + a_1(t)y' + a_0(t)y = 0 \tag{1}$$

donde a_1 y a_0 son funciones continuas. Considere las funciones y_1 y y_2 que satisfacen la ecuación (1) y además

$$y_1(x_0) = 1, y_1'(x_0) = 0 \tag{2}$$

$$y_2(x_0) = 0, y_2'(x_0) = 1. \tag{3}$$

Argumente la existencia de tales funciones y muestre (si es que existen) que forman un conjunto fundamental. Discuta acerca de la unicidad del conjunto fundamental.

Ecuaciones Lineales de Segundo Orden

1. Encuentre la solución de las siguientes ecuaciones usando el método de reducción de orden.
(a) $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0$
(b) $xy'' - (2+x)y' = 0$
(c) $y'' - y = 0$; $y_1(x) = cosh(x)$
(d) $xy'' - (x+1)y' + y = 0$
(e) $x^2y'' - 3xy + 5y = 0$; $y_1(x) = x^2cos(ln(x))$

2. Encuentre un conjunto fundamental para las siguientes ecuaciones.
(a) $y'' - y = 0$
(b) $y'' - 10y' + 25y = 0$
(c) $y'' + y' + y = 0$
(d) $y'' - 4y' + 13y = 0$
(e) $y'' + k^2y = 0$

3. Encuentre la solución general de las siguientes ecuaciones usando el método de coeficientes indeterminados.
(a) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2$
(b) $y'' - 3y' = 8e^{3x} + 4sen(x)$
(c) $y'' + 8y = 5x + 2e^{-x}$
(d) $y'' - 2y' + y = 10e^{-2x}cos(x)$
(e) $y'' + y' = x^2sen(x)$

4. Encuentre una solución particular de las siguientes ecuaciones usando el método de variación de parámetros.
(a) $y'' - 4y' + 4y = (x+1)e^{2x}$
(b) $y'' - y = tan(x)$
(c) $y'' - 2y' - 3y = 64xe^{-x}$

5. Sea $f : [0,\pi] \to \mathbb{R}$ una función continua. Considere el problema de valores frontera

$$u'' + u = f(t),\ t \in]0,\pi[,\ u(0) = u(\pi) = 0. \tag{4}$$

Demuestre que (4) tiene solución si y sólo si $\int_0^\pi f(t)sin(t)dt = 0$

6. Considere la ecuación diferencial

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0 \tag{5}$$

donde p y q son funciones continuas en $\mathbb{R}$ de período 1. Demuestre que si $\phi(t)$ es solución de (5) tal que $\phi(0) = \phi(1)$ y $\phi'(0) = \phi'(1)$ entonces ϕ es también periódica.

Teorema de Sturm y Propiedades Cualitativas de las Soluciones

1. Considere la EDO de segundo orden homogénea

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = 0. \tag{6}$$

(a) Haciendo $y(x) = u(x)v(x)$ en (6) y anulando el coeficiente de u' que aparece, determine v (compruebe que $v > 0$) y deduzca que (6) equivale a

$$u'' + r(x)u = 0 \tag{7}$$

donde $r(x) = q - \frac{1}{4}p^2 - \frac{1}{2}p'$. Decimos que (7) es la forma normal de (6).
(b)Considere la ecuación de Schrodinger en una dimensión

$$y'' + \frac{2}{x}y' + (k + \frac{2}{x} - \frac{l(l+1)}{x^2})y = 0 \tag{8}$$

donde k y l son números naturales. Encuentre una condición para que pueda haber oscilaciones de los electrones del átomo de hidrógeno descritos por (8)

2. Considere la ecuación

$$x'' + \frac{1}{t}x' + \frac{a(t)}{t^2}x = 0, \ t > 0$$

con $\int_1^\infty \frac{a(t)}{t}dt = \infty$ y $a(t) > 0 \ \forall t > 0$. Muestre que x tiene infinitos ceros.

3. Considere la ecuacion $y'' + x^2y = 0, \ x > 0$ y sea $a \in \mathbb{R}$ un cero de y. Muestre que existe $b \in (a, a + \frac{\pi}{a})$ que es también cero de y.

4. Demuestre que la Ecuación de Bessel $x^2y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0$ tiene soluciones oscilatorias.

5. Muestre que toda solución del problema $y'' + \frac{1}{x}y + y^3 = 0$ tiene infinitos ceros.

6. Sea y solución no trivial de $y'' + q(x)y = 0,\ x > 0$. Demuestre que y tiene un número infinito de ceros si $q(x) > \frac{k}{x^2}$ con $k > \frac{1}{4}$ y sólo un número finito si $q(x) < \frac{1}{4x^2}$.

7. Sea y solución no trivial de $y'' + p(x)y' + q(x)y = 0,\ x \in [0, \infty)$ con $q(x) < 0\ \forall x > R$. Muestre que y posee a lo más un número finito de ceros en $[0, \infty)$.
HINT. Demuestre que en $]R, \infty[$ hay a lo más un cero.

8. Considere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función continuamente diferenciable tal que $f(0) = 0$ y tal que para ciertos números positivos a y b se tiene que $b^2 < f'(s) < a^2$ para todo s. Sea $y(x)$ una solución de la ecuación
$$y'' + f(y) = 0 ,$$
en algún intervalo I. Demuestre que si x_1 y x_2 son ceros consecutivos de $y(x)$ en I entonces
$$\frac{\pi}{a} < x_2 - x_1 < \frac{\pi}{b} .$$
Aplique la propiedad anterior a un famoso problema de la mecánica.

9. Considere u y v soluciones positivas de
$$u'' + a(t)u = 0 \tag{9}$$
$$v'' + b(t)v = 0 \tag{10}$$
respectivamente, donde $a(t) > b(t),\ \forall t > 0$. Suponga que $u(0) = v(0)$ y $u'(0) = v'(0)$. Muestre que $u(t) < v(t),\ \forall t > 0$.

10. (a) Sean $a(x)$, $b(x)$ funciones continuas en $\mathbb{R}$, con $a(x) < b(x)$ para todo $x \in [0, 1]$. Suponga que las funciones y, z no son idénticamente nulas y satisfacen las ecuaciones (9) y (10) del problema anterior respectivamente. Suponga también que $y'(0) = z'(0) = 0$ y que para cierto $x_0 \in [0, 1]$, $y(x_0) = 0$. Muestre que existe $x_1 \in]0, x_0[$ tal que $z(x_1) = 0$.
(b) Use (a) para probar la siguiente afirmación: Si $0 < a(x) < \frac{\pi^2}{4}$ para todo $x \in [0, 1]$ entonces el problema de condiciones de borde
$$y'' + a(x)y = 0, \quad x \in [0, 1] \tag{11}$$
$$y'(0) = 0,\ y(1) = 0 , \tag{12}$$
tiene sólo la solución trivial.

Ecuaciones Lineales de Orden Superior

1. Encuentre la solución general de los siguientes problemas.
   (a) $y^{(3)} + 3y^{(2)} + 4y^{(1)} + 2y = 0$
   (b) $y^{(4)} + 2y^{(2)} + y = 0$
   (c) $y^{(3)} - 3y^{(2)} + 4y = te^{2t} - sent$
   (d) $y^{(4)} + 8y^{(2)} + 16y = cos^2 t$

2. Considere la ecuación de tercer orden

$$x^{(3)} + ax^{(2)} + bx(1) + cx = e^{ut}$$

   donde a, b, c, u son constantes reales o complejas. Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de esta ecuación. Muestre que si u es tal que $p(u) = 0, p^{(1)}(u) \neq 0$ entonces esta ecuación tiene solución particular

$$x(t) = \frac{1}{p^{(1)}(u)} te^{ut} .$$

3. Resuelva los siguientes problemas de valores iniciales.
   (a) $y^{(3)} - 6y^{(2)} - 11y^{(1)} - 6y = e^{4t}$, $y(0) = y^{(1)}(0) = y^{(2)}0 = 0$
   (b) $3y^{(2)} + 4y^{(1)} + y = sen(t)e^{-t}$, $y(0) = 1,\ y^{(1)}(0) = 0$
   (c) $y'' + k^2 y = sent,\ y(0) = y'(0) = 0$

4. Verifique que $y_1 = x^{-1/2} senx,\ y_2 = x^{-1/2} cosx$ son soluciones de la ecuación homogénea asociada a

$$4x^2 y'' + 4xy' + (4x^2 - 1)y = 12x^{3/2} senx.$$

   Determine la solución y de la ecuación tal que $\lim\limits_{x \to \pi/2} x^{1/2} y = 0$ y además $\lim\limits_{x \to \pi} x^{1/2} y = 0$.