Guía #2
MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Prof. Manuel del Pino

Consultas a *manreyes@cipres*.

P1 Sea el sistema $\dot{x} = Ax$, tal que A es antisimétrica, es decir que $A^T = -A$.
Demuestre que si $x_1(t), x_2(t) \in R^n$ son soluciones del sistema y ortogonales en algún t_0, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales para todo t.

P2 a) Resuelva $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Resuelva $\dot{x} = Ax$ con

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{bmatrix}$$

¿Qué debe cumplir la condición inicial $x(0)$ para que $|x(t)|$ sea acotado para todo t.

P3 Considere el sistema $\ddot{X} = A(t)X$ con $X \in M_{nn}$ y $A : R \to M_{nn}$ continua.
Recuerde que por el teorema de existencia y unicidad, este sistema tiene una única solución definida en todo R para cualquier condición inicial.

Definición. Se dice que $X(t)$ es una solución fundamental si $X(t)$ es solución del sistema y es invertible para todo t.

a) Demuestre que existe una solución fundamental.
Indicación: considere $X(t)$ la matriz cuyas columnas son las soluciones de $\dot{x} = A(t)x$ con $x(0) = e_i$, con e_i el i-ésimo vector canónico.

b) Demuestre que si $X(t)$ e $Y(t)$ son dos soluciones fundamentales, entonces existe una matriz C invertible tal que $X(t) = Y(t)C$.
Indicación: considere $Z(t) = Y^{-1}(t)X(t)$ y el hecho que si $Y(t)$ es invertible y de clase $\mathcal{C}^\infty$ entonces Y^{-1} es de clase $\mathcal{C}^\infty$ y $\frac{d}{dt}Y^{-1} = -Y^{-1}\frac{d}{dt}Y\,Y^{-1}$.

c) Demuestre que si $A(t)$ tiene período τ, entonces si $X(t)$ es solución fundamental, se tiene que existe una matriz C tal que $X(t+\tau) = X(t)C$.

P4 Descomponga las siguientes matrices en su forma $N + S$ (N nilpotente, S diagonalisable) para resolver la ecuación $\dot{x} = Ax$:

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \qquad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

P5 (Control 2, MA26A Semestre otoño de 1994) Demuestre que si $A \in R^{n\times n}$ es tal que e^{At} existe, $\forall t \in R$, entonces

$$det\ e^{At} = e^{tr\ At},$$

donde si $A = (a_{ij})_{i,j\in\{`1,\ldots,n\}}$ la *traza* $A = tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Indicación. Demuestre que si $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} = (A_i(t))_i$ con $A_i(t) \in R^n$, entonces

$$\frac{d}{dt} det\ A(t) = \sum_i |A_1(t) \ldots A_i'(t)\ A_{i+1}(t) \ldots A_n(t)|,$$

y que la traza es invariante bajo cambios de coordenadas.