U. DE CHILE
INGENIERIA

Departamento de Ingeniería Matemática. FCFM-U. de Chile.
MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Guía #3

Semestre 2002-1. Prof.: A. Osses - Aux: F. Ortega.

El objetivo de esta tercera guía docente del curso es recopilar ejercicios, problemas de control y de modelamiento que involucran Transformada y sistemas de EDO.

Ejercicios:

1. Pruebe que las funciones siguientes son de orden exponencial y encuentre sus transformadas de Laplace por definición. **(a)**$f(t) = senh(at)$ **(b)**$f(t) = cosh(at)$
(c)$f(t) = sen(at)$ **(d)**$f(t) = cos(at)$
(e)$f(t) = \frac{t^{n-1}e^{at}}{(n-1)!}$

2. Sea $f : [0, \infty[\to I\!R$ una función periódica con periodo $T > 0$ (ie, $f(t) = f(t+T), \quad \forall t > 0$). Demuestre que:
$$L(f)_{(s)} = \frac{\int_0^T e^{-s\xi} f(\xi) d\xi}{1 - e^{-sT}}$$
HINT: Una suma geométrica se escribe como sigue:
$$\sum_{k=0}^{N} q^k = \frac{1 - q^{N+1}}{1 - q}, \text{ si } |q| < 1$$

3. La función gamma ($\Gamma(x)$) se define como:
$$\Gamma(x) = \int_0^\infty e^{-t} t^{x-1} dt$$
   (i) Puede demostrarse que la integral converge para $x > 0$.Usando integración por partes pruebe que $\Gamma(x + 1) = x\Gamma(x), \quad \forall x > 0$.
   (ii) Pruebe que $\Gamma(n + 1) = n!, n \in N$. Por esta propiedad, $\Gamma(x)$ es llamada la generalización de la función factorial a $I\!R_+$.
   (iii) Sea $\alpha \in I\!R, \alpha > -1$. Demuestre que
$$L(t^\alpha)_{(s)} = \frac{\Gamma(\alpha + 1)}{s^{\alpha+1}}$$
   HINT: haga $t = u \cdot s$ en la integral que define la transformada de Laplace anterior.

4. Considere un sistema lineal de la forma $x' = Ax$, $t \geq 0$, con A $\in M_{nxn}(\mathbf{R})$ una matriz diagonalizable. Demuestre que si todas las soluciones de dicho sistema son periódicas, y además todas tienen el mismo período, digamos T, entonces el polinomio característico de la matriz A es de la forma $p(\lambda) = (\lambda^2 + T^2)^{n/2} = 0$.(Notar que n tiene que ser un número par).

5. Resolver el siguiente sistema: $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

6. Resuelva el sistema $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

7. Encuentre las 4 soluciones del sistema $\vec{X}'(t) = A\vec{X}(t)$ con $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -8 & -3 \\ -18 & -1 & 0 & 0 \\ -9 & -3 & -25 & -9 \\ 33 & 10 & 90 & 32 \end{pmatrix}$

8. Resolver usando sistemas de edo's la siguiente ecuación diferencial:

$$\frac{d^4y}{dt^4} - 8\frac{d^2y}{dt^2} + 16y = 0$$

9. Obtener e^{At} con las siguientes matrices: $a)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $b)$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

Problemas de Control:

1. **(i)** Resuelva usando Transformada de Laplace la ecuación

$$my'' + ky = f(t), \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0$$

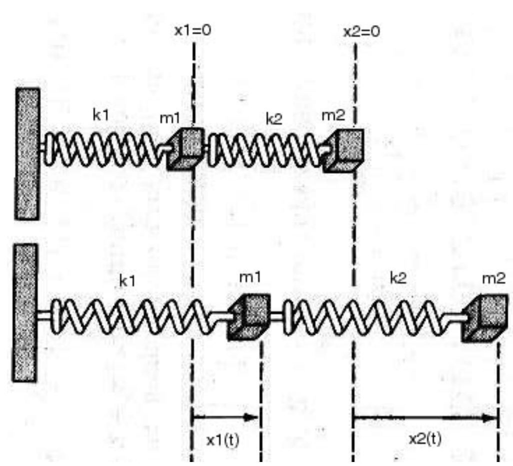
donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1/\epsilon & a < t \leq a + \epsilon \\ 0 & t \geq a + \epsilon \end{cases}$$

(ii) Usando el resultado de **(i)**, pruebe que $z(t) = lim_{\epsilon \to 0} y(t), \quad t \geq 0$ satisface la ecuación

$$mz'' + kz = 0, \quad z(a) = 0, \quad z'(a) = 1/m$$

2. (C1-2000-1-Osses) *Resortes acoplados.* Se tiene el sistema de resortes acoplados mostrado en la figura siguiente, donde $x_1 = 0$ y $x_2 = 0$ son las posiciones de equilibrio de las masas m_1 y m_2 respectivamente.



Se pide encontrar las ecuaciones que rigen el movimiento de las masas m_1 y m_2 en torno a sus puntos de equilibrio (i.e., encontrar $x_1(t)$ y $x_2(t)$) dadas las siguientes condiciones iniciales:

$$x_1(t=0)=0; \quad x_1'(t=0)=1; \quad x_2(t=0)=0; \quad x_2'(t=0)=-1;$$

Para lo anterior deberá plantear las ecuaciones diferenciales que rigen el sistema físico anterior y resolverlas mediante el uso de la transformada de Laplace. (Se tiene que $k_1=6$, $k_2=4$, $m_1=m_2=1$. **Ind.:** La ley de Hooke establece que en un resorte la fuerza es proporcional a la deformación y de sentido contrario, ie: $F=-k\Delta x$

3. (C2-2001-1-Osses) Suponiendo que f es continua por pedazos y de orden exponencial, encuentre f tal que $f(0)=0$ y que sea solucón de la ecuación integro-diferencial siguiente

$$f'(t)=sen(t)+\int_0^t f(t-\sigma)cos(\sigma)d\sigma$$

4. Definimos la siguiente transformada lineal del tipo "Mellin" para funciones $y(x)$ continuas para $x\in[0,1]$:

$$M[y(x)](s)=\int_0^1 x^{s-1}y(x)dx \quad s>0(\text{cuando existe}).$$

(i) Demuestre que $M[1]=\frac{1}{s}$ y que $M[x^\alpha y](s)=M[y](s+a)$ para $a\in I\!R$.

(ii) Demuestre que $M[xy'](s)=-sM[y]+y(1)$.

(iii) Demuestre que $M[\int_x^1 y(u)/udu]=\frac{1}{s}M[y]$. **HINT:** Defina $z=\int_x^1 y(u)/udu$ y use (ii).

(iv) Resuelva la siguiente EDO usando la transformada de Mellin y las propiedades demostradas en los puntos anteriores:

$$x(xy')'+2xy'=1, \quad y(1)=0, \quad y'(1)=0$$

HINT: Se sabe que si $M[f]=M[g]$ entonces $f=g$ para f,g continuas en [0,1].

5. Sea $A(t)$ una matriz simétrica de nxn de coeficientes contínuos en toda la recta real, tal que $A(t)$ es invertible $\forall t>0$.

(i) Demuestre que los valores propios de $A(t)$ son una función contínua del tiempo.

(ii) Considere el sistema $\vec{X}'(t)=A\vec{X}(t)$. Suponga que existe una constante $\eta>0$ tal que $\forall\lambda_i(t)$ de $A(t)$ satisface: $\lambda_i(t)<-\eta \qquad i=1,...,n$. Demuestre que toda solución $\vec{X}(t)$ de este sistema satisface $\vec{X}(t)\to\vec{0}$ cuando $t\to\infty$. **Ind:** Recuerde que existe una base ortonormal $u_1(t),u_2(t),...,u_n(t)$ de vectores propios de $A(t)$ respectivamente asociados a $\lambda_1(t),\lambda_2(t),...,\lambda_n(t)$. Utilice esto para deducir:

$$\frac{d}{dt}\|\vec{x}(t)\|^2\leq-\eta\|\vec{x}(t)\|^2$$
$$\text{donde } \|\vec{x}(t)\|^2=\sum_{i=1}^n x_i^2$$

6. Para el sistema

$$X' = A(t)X + B(t), \quad t \geq 0,$$
$$X(0) \text{ dado en } \mathbb{R}^d,$$

donde $A(t) \in \mathbb{R}^{dxd}$, $B(t) \in \mathbb{R}^d$, y sus componentes son funciones continuas para $t \geq 0$.

(i) Si $\Phi(t)$ es la matriz fundamental canónica del sistema, demuestre la siguiente fórmula de Abel generalizada:

$$det(\Phi(t)) = exp\left(\int_0^t traza(A(t))dt\right)$$

Ind.: Puede usar la siguiente fórmula para la derivada del determinante:

$$\frac{d}{dt}detM(t) = \sum_{k=1}^{d} detM_k(t)$$

donde $M_k(t)$ es la matriz que resulta al derivar la k-ésima fila de $M(t)$ y la linealidad del determinante por filas.

(ii) Demuestre que la fórmula anterior generaliza la fórmula de Abel para las EDO lineales de orden n:

$$W(y_1, \ldots, y_n) = exp\left(-\int_0^t a_{n-1}(t)dt\right)$$

donde $a_{n-1}(t)$ es el coeficiente del término de orden n-1 de la EDO normalizada.

7. Sea A $\in M_{n\mathrm{x}n}(\mathbb{R})$ constante. Se define $e^{At} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k \cdot t^k}{k!}$. Suponga que para cierto número $\lambda \in \mathbf{R}$ y cierto número m $\in \mathbf{N}$ se tiene que $(A - \lambda \cdot I)^m = 0$ (ie, la matriz $(A - \lambda \cdot I)$ es nilpotente).

   (i) Demuestre que:

   $$e^{At} = e^{\lambda t} \cdot \{I + t(A - \lambda I) + \ldots + \tfrac{t^{m-1}}{(m-1)!} \cdot (A - \lambda I)^{m-1}\}$$

   Ind: $e^{(A+B)} = e^A \cdot e^B \quad ssi \quad AB = BA.$

   (ii) Use lo anterior para calcular explícitamente la matriz e^{At} de:

   $$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

8. Considere el sistema lineal $\vec{X}'(t) = A \cdot \vec{X}(t)$ en que la matriz A es antisimétrica (ie, $A^T = -A$). Sean X_0 y X_1 vectores en $\mathbf{R^n}$ y denotemos por $Z(t, X_0)$ y $X(t, X_1)$ las soluciones de la ecuación con condiciones iniciales en t=0 igual a X_0 y X_1 respectivamente. Demuestre que si $< X_0, X_1 >= 0$ entonces $< Z(t, X_0), X(t, X_1) >= 0$ $\forall t \in \mathbf{R}$ (ie, si las soluciones comienzan ortogonales permanecen ortogonales).

9. Sea A una matriz simétrica de nxn a coeficientes constantes, y supongamos que $y : \mathbf{R} \to \mathbf{R^n}$ es diferenciable.

(i) Demostrar que: $[Ay(s)]^t \frac{dy}{ds}(s) = \frac{1}{2}\frac{d}{ds}([Ay(s)]^t \cdot y(s))$.

(ii) Si "y" satisface la ecuación $y'' + Ay = 0$ demuestre que para alguna constante $C \in \mathbf{R}$ se tiene:

$$\|y'(s)\|^2 + [Ay(s)]^t y(s) = C$$

10. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -4 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & -3 & 1 \end{pmatrix}$ y el vector $\vec{b}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t} \\ sen(t) \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ resuelva el sistema $\vec{x}' = A\vec{x} + \vec{b}(t)$. **Ind:** Recuerde que dada una matriz fundamental del sistema $x' = Ax + b(t)$, la solución corresponde a: $x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds$, según el método de variación de parámetros.

11. Considere el sistema discreto siguiente:

$$\begin{aligned} X_{n+1} &= AX_n + B_n, \quad n \geq 0 \\ &X_0 \text{ dado en } \mathbb{R}^d \end{aligned}$$

donde $A \in \mathbb{R}^{dxd}, B_n \in \mathbb{R}^d, n \geq 0$.

(i) Demuestre que la solución del sistema anterior está dada por:

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j} B_{j-1}, \quad n \geq 1.$$

(ii) Si $B_n = 0, n \geq 0$, y los valores propios de A son estrictamente menores que 1 en módulo, demuestre que $X_n \to 0$ si $n \to \infty$. (Considere sólo el caso A diagonalizable).

(iii) Suponga que la población de ballenas b, plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ un parámetro de crecimiento:

$$\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} & = & \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} & = & \lambda T_n \\ b_0 = 10, & p_0 = 100 & T_0 = 15 \end{array}$$

Resuelva el sistema usando la fórmula que dedujo en el punto (i), calculando explícitamente A^n, $n \geq 0$, y determine para qué valores de λ existe el límite cuando $n \to \infty$ de b_n, p_n y T_n, explicitándolo en cada caso. **Ind.:** Puede servirle usar la fórmula del binomio, válida para $(M_1 + M_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k}$ si las matrices M_1 y M_2 conmutan.

Problemas de Modelamiento:

1. Considere el sistema discreto siguiente:

$$X_{n+1} = AX_n + B_n, \quad n \geq 0$$
$$X_0 \text{ dado en } \mathbb{R}^d$$

donde $A \in \mathbb{R}^{dxd}, B_n \in \mathbb{R}^d, n \geq 0$.

(i) Demuestre que la solución del sistema anterior está dada por:

$$X_n = A^n X_0 + \sum_{j=1}^{n} A^{n-j} B_{j-1}, \quad n \geq 1.$$

(ii) Si $B_n = 0, n \geq 0$, y los valores propios de A son estrictamente menores que 1 en módulo, demuestre que $X_n \to 0$ si $n \to \infty$. (Considere sólo el caso A diagonalizable).

(iii) Suponga que la población de ballenas b, plancton p y temperatura del mar T están regidas por el siguiente sistema discreto, donde n designa el año y $\lambda > 0$ un parámetro de crecimiento:

$$\begin{array}{rcl} b_{n+1} & = & \lambda b_n + p_n \\ p_{n+1} & = & \lambda p_n + T_n \\ T_{n+1} & = & \lambda T_n \\ b_0 = 10, \quad p_0 = 100 & & T_0 = 15 \end{array}$$

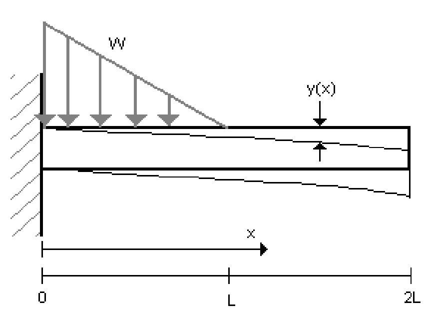
Resuelva el sistema usando la fórmula que dedujo en el punto (i), calculando explícitamente A^n, $n \geq 0$, y determine para qué valores de λ existe el límite cuando $n \to \infty$ de b_n, p_n y T_n, explicitándolo en cada caso. **Ind.:** Puede servirle usar la fórmula del binomio, válida para $(M_1 + M_2)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} M_1^k M_2^{n-k}$ si las matrices M_1 y M_2 conmutan.

2. (C2-2000-1-Osses) *Deformación de una viga.* Al ser sometida a una carga W, la viga de la figura tiene una deformación $y(x)$ donde x es la variable longitudinal. Esto puede ser modelado por la EDO de cuarto orden

$$\frac{\partial^4 y}{\partial x^4} = W(x)$$

para $o \leq x \leq 2L$ con las siguientes condiciones de borde en los extremos $x = 0$ y $x = 2L$

$$y(0) = y'(0) = y''(2L) = y'''(2L) = 0$$



La carga está distribuida sobre la viga como

$$W(x) = \begin{cases} \frac{w_0}{L}(L-x) & \text{si } 0 \leq x \leq L \\ 0 & \text{si } L \leq x \leq 2L \end{cases}$$

(i) Escriba W usando la función escalón de Heaviside(función escalón unitaria).

(ii) Usando transformada de Laplace y las dos primeras condiciones de borde, resuelva la ecuación expresando la solución en términos de $A = y''(0)$ y $B = y'''(0)$.

(iii) Calcule y', y'', e y'''. Determine los valores de A y B usando las dos últimas condiciones de borde.

3. (C2-2001-1-Osses) *Masas atmosféricas.* El siguiente es un modelo para la evolución en las masas atmosféricas de un contaminante(por ej:monóxido de carbono) en el hemisferio norte (c_1) y el hemisferio sur (c_2) de la Tierra:

$$\begin{aligned} c_1' &= f_1 - \alpha(c_1 - c_2) - \beta c_1 \\ c_2' &= f_2 - \alpha(c_2 - c_1) - \beta c_2 \end{aligned}$$

La constante $\alpha > 0$ representa el inverso del tiempo de intercambio interhemisférico en [1/año] y la constante $\beta > 0$ representa el inverso de tiempo de vida química del contaminante en [1/año].

Parte (a) Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son funciones conocidas $f_1 = 30$ y $f_2 = 10$ en [Kton/año]. Inicialmente $c_1(o) = 84$[Kton] y $c_2(o) = 60$[Kton].

(i) Introducimos la masa media entre los dos hemisferios como $\bar{c}(t) = (c_1(t)+c_2(t))/2$ y la emisión media como $\bar{f}(t) = (f_1 + f_2)/2$. Deduzca una EDO y condiciones iniciales para $\bar{c}(t)$ y encuentre $\bar{c}(t)$.

(ii) Si se estima que el límite de $\bar{c}(t)$ cuando $t \to \infty$ es de 100[Kton], encuentre una estimación para β^{-1}, esto es, los años de vida química del contaminante.

(iii) Como $c_2 = 2\bar{c} - 1$, basta ahora encontrar c_1. Para ello, aplique transformada de Laplace a las ecuaciones en c_1' y c_2'. Despeje la transformada de c_1 eliminando la transformada de c_2 y exprésela en término de las funciones: $\Psi_1(s) = \frac{1}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\Psi_2(s) = \frac{s}{(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$, $\Psi_3(s) = \frac{1}{s(s+\beta)(s+2\alpha+\beta)}$

(iv) Encuentre las antitransformadas de Ψ_1, Ψ_2 y Ψ_3. **HINT:** si le agradan las buenas recetas sepa que si $\Psi(s) = \frac{A}{s-a} + \frac{B}{s-b} + \frac{C}{s-c}$ con a,b y c distintos, entonces $A = lim_{s \to a}(s-a)\Psi(s)$

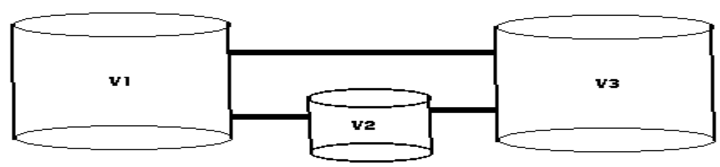
Parte (b) Las emisiones del contaminante en cada hemisferio son funciones conocidas $f_1(t) = 20 + 10 \cdot e^{-4t}$ y $f_2(t) = 5 + 5 \cdot e^{-2t}$ en [Kton/año](Las exponenciales negativas se deben a políticas de reducción de emisión de contaminantes en el planeta). Si inicialmente $c_1(o) = 84$[Kton] y $c_2(o) = 60$[Kton], encuentre la concentración del contaminante en cada hemisferio de la Tierra en función del tiempo(ie, encuentre $c_1(t)$ y $c_2(t)$), y vea que pasa cuando el sistema alcanza el equilibrio(ie, cuando $t \to \infty$). (Mediciones permiten estimar que el tiempo de intercambio interhemisférico es $\alpha^{-1} = 2$[años] y el tiempo de vida química del monóxido de carbono es $\beta^{-1} = 4$[años] aproximadamente).

Ind: Recuerde que dada una matriz fundamental del sistema $x' = Ax + b(t)$, la solución corresponde a: $x(t) = e^{At}x_0 + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-s)}b(s)ds$, según el método de variación de parámetros.

4. (Tipo Examen 2001-1-Osses) *Mezclador.* Se tiene un sistema de tres estanques los cuales tienen volúmenes V1,V2 y V3 de salmuera respectivamente. Existe dentro de los tres tubos un flujo interno del líquido lo cual hace variar la concentración de sal en cada tanque (x_1,x_2,x_3 respectivamente). Ahora la variación de concentración de sal está dada por:

$$\frac{dx_1}{dt} = -k_1x_1 + k_3x_3$$
$$\frac{dx_2}{dt} = k_1x_1 - k_2x_2$$
$$\frac{dx_3}{dt} = k_2x_2 - k_3x_3$$

donde $k_i = \frac{r}{V_i}$ $\quad V_1 = 20 \quad V_2 = 50 \quad V_3 = 20 \quad r = 10.$



(i) Hallar las concentraciones de sal en cada uno de los estanques en función del tiempo.

(ii) Demostrar que la concentración total de sal del sistema es constante.

(iii) Analizar que pasa cuando $t \to \infty$.