Guía 3 MA26A

Prof. M. del Pino
Aux. C. Contardo, J. Escobar

Ecuaciones Lineales de Orden Superior

1. Encuentre la solución general (real) de la ecuación

$$x''' - x'' + x' - x = \sinh t + \sin t \tag{1}$$

2. Encuentre la solución de:

   (a) $y''' - 5y'' + 6y' = 2\sin x + 8$

   (b) $2y''' + 9y'' + 12y' + 5y = 0$

   (c) $x^3y''' - 3x^2y'' + 6xy' - 6y = 3 + \ln x^3$

   (d) $(x-1)^2y'' - 2(x-1)y' - 4y = 0$

   (e) $x^2y'' + 10xy' + 8y = x^2$

Soluciones en Series de Potencia

1. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el Método de Series de Potencia y determine su radio de convergencia.

   (a) $y'' - 2xy = 0$

   (b) $(x^2+1)y'' + xy' - y = 0$

2. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el Método de Frobenius y determine su radio de convergencia.

   (a) $-xy'' + 3y' - y = 0$

   (b) $2xy'' + (1+x)y' + y = 0$

   (c) $xy'' + (x-6)y' - 3y = 0$

3. La siguiente ecuación surge de la teoría del oscilador armónico en mecánica cuántica

$$w'' + (2p + 1 - x^2)w = 0, \tag{2}$$

donde p es un entero positivo. Buscamos una solución no-nula de esta ecuación tal que $w(x) \to \infty$ cuando $|x| \to \infty$. Para ello, encuentre una sustitución de la forma $w(x) = u(x)y(x)$ que reduzca la ecuación a una de la forma

$$y'' - 2xy' + 2py = 0, \tag{3}$$

que es la *Ecuación de Hermite*. Encuentre dos soluciones linealmente independientes de esta ecuación, expresadas como series de potencia en torno a $x = 0$. Muestre que una de estas soluciones es un polinomio y finalmente encuentre una solucion de (2) que tienda a cero cuano $|x| \to \infty$ en el caso $p = 4$.

4. La *Ecuacion de Chebyshev* es

$$(1 - x^2)y'' - xy'' + p^2 y = 0, \tag{4}$$

donde p es una constante.

(a) Encuentre dos soluciones linealmente independientes que sean válidas para $|x| < 1$.

(b) Pruebe que si p es un entero positivo, existe un polinomio de grado p que es solución.

5. La *Ecuación de Bessel* de orden p

$$x^2 y'' + xy' + (x^2 - p^2)y = 0 \tag{5}$$

donde p es no-negativo, es de especial importancia en Física Matemática.

(a) Encuentre dos soluciones linealmente independientes de la Ecuacioón de Bessel de orden $\frac{1}{2}$.

(b) Discuta (a) y los resultados vistos en clases.

6. Considere nuevamente la Ecuación de Bessel pero ahora suponga $p = 0$.

(a) Pruebe que su ecuación indicial tiene sólo una raíz. Deduzca que

$$y_1 = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2^{2n}(n!)^2} x^{2n} \tag{6}$$

es la solución en Serie de Frobenius.

(b) Muestre que una segunda solución de la ecuación es

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{2^{2n}(n!)^2}(1 + 1/2 + \ldots + 1/n)x^{2n}. \tag{7}$$

Para ello defina

$$y_2 = y_1 \ln x + \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n, \tag{8}$$

y escoja adecuadamente los parámetros c_n de modo que y_2 sea también solución de la ecuación.

7. La ecuación diferencial

$$x^2 y'' + (3x - 1)y' + y = 0 \tag{9}$$

tiene a $x = 0$ como punto singular irregular. Muestre que

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} n! x^n \tag{10}$$

es una "solución" en Series de Frobenius, sin embargo tiene radio de convergencia 0. Discuta la validez de la "solución" obtenida.

Transformadas de Laplace

1. Muestre que no existe la transformada de Laplace de $1/t^2$.

2. Calcule las siguientes transformadas y antitransformadas.

   (a) $\mathcal{L}[\sin^2 x]$

   (b) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{s^2(s+2)^3}]$

   (c) $\mathcal{L}[\sin t\,\mathcal{U}(t - \pi/2)]$

   (d) $\mathcal{L}^{-1}[\frac{s+1}{(s^2-4s)(s+5)}]$

3. (a) Suponga que f es continua por tramos y *T-periódica* en $[0, \infty)$, esto es, $f(t + T) = f(t)$ para todo $t > 0$. Demuestre que la transformada de Laplace de f puede calcularse mediante la fórmula

$$\mathcal{L}f(s) = \frac{1}{1 - e^{-sT}} \int_0^T e^{-st} f(t)dt. \tag{11}$$

(b) Defina la función f en el intervalo $0 \leq t < 2$ por

$$f = \begin{cases} t & \text{si } 0 \leq t < 1 \\ 0 & \text{si } 1 \leq t < 2 \end{cases}$$

y para $t \geq 2$, $f(t+2) = f(t)$. Grafique esta función y calcule su transformada de Laplace.

(c) Calcule la transformada de $|\sin ax|$ y $\cos x$

4. Resuelva la siguiente ecuacion usando el método de la transformada de Laplace.

$$y'' + 4y = f(t), \; y(0) = y'(0) = 0, \tag{12}$$

donde $f(t) = 0$ si $0 \leq t < 3$, $f(t) = t$ si $t > 3$.

5. Resuelva las siguientes ecuaciones.
(a) $y'' + 4y' + 6y = 1 + e^{-t}, \; y(0) = y'(0) = 0$
(b) $y'' + 16y = \cos 4t, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$
(c) $ty'' + 2ty' + 2y = 0, \; y(0) = 0, \; y'(0) = 1$ (d) $ty'' - y' = t^2, \; y(0) = 0$

Nota. Recuerden que la guía 2 contiene también materia que será controlada el Miercoles. Pueden encontrar más problemas en el Zill. Suerte.