Guía 4 MA26A

Prof. M. del Pino
Aux. C. Contardo, J. Escobar

Transformada de Laplace

1. Suponiendo que f es una función continua por partes y de orden exponencial muestre las siguientes propiedades

   (a) $\mathcal{L}\{f(t)\cosh at\} = \frac{1}{2}[\mathcal{L}\{f\}(s-a) + \mathcal{L}\{f\}(s+a)]$

   (b) $\mathcal{L}\{f(t)/t\} = \int_s^\infty \mathcal{L}\{f\}(s)ds$, donde además, $\lim_{t\to 0} f(t)/t$ existe.

2. Resuelva las siguientes ecuaciones usando el método de la Transformada de Laplace.

   (a) $y'' - 6y' + 9y = t^2 e3t,\ y(0) = 2,\ y'(0) = 6$

   (b) $y'' + 16y = \cos 4t,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

   (c) $y'' + 16y = f(t),\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$, donde $f(t) = \cos 4t$, si $0 \leq t < \pi$ y $f(t) = 0$, si $t \geq \pi$.

   (d) $y = 3t^2 - e^{-t} - \int_0^t f(s)e^{t-s}ds$

   (e) $ty'' + 2(t-1)y' - 2y = 0,\ y(0) = 0,\ y'(0) = 1$

   (f) $y'' + 4y' + 4y = f(t),\ y(0) = y'(0) = 0$, donde $f(t) = 1$, si $\pi \leq t \leq 2\pi$ y $f(t) = 0$ si no.

   (g) $y' + 6y + 9\int_0^t y(s)ds = 1,\ y(0) = 0$

Sistemas de Ecuaciones Lineales y No-Lineales

1. Resuelva los siguientes sistemas de ecuaciones

   (a) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix} X$

   (b) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 0 \\ t \\ 2e^{3t} \end{pmatrix}$

   (c) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} X$

(d) $\dot{X} = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} X$ con $X(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(e) $\dot{X} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} X + \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix}$ $X(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

2. Sea $A(t)$ una matriz simétrica de nxn con coeficientes continuos en todo $\mathbb{R}$, tal que $A(t)$ es invertible para todo t.

   (a) Demuestre que los valores propios de $A(t)$ son una función continua del tiempo.

   (b) Sea $A(t)$ una matriz simétrica y considere el sistema:

   $$\dot{X} = A(t)X(t)$$

   Suponga que existe una constante $\xi > 0$ tal que todo $\lambda_i(t)$ valor propio de $A(t)$ satisface $\lambda_i(t) < -\xi$.
   Demuestre que toda solución $X(t)$ de este sistema satisface $X(t) \to 0$ cuando $t \to \infty$. Para ello, recuerde que existe una base ortonormal $u_1(t), ..., u_n(t)$ formada por vectores propios de $A(t)$. Utilice esto para deducir que:

   $$\tfrac{d}{dt}\|X(t)\|^2 \leq -\xi\|x(t)\|^2$$

3. Considere el sistema, de coeficientes variables:

$$\dot{X} = A(t)X$$

Donde la matriz $A(t)$ es periódica de período π, esto es $A(t+\pi) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.
Sea $W(t)$ la matriz fundamental de 'este sistema tal que $W(0) = I_{nxn}$ (la matriz identidad).

   (a) Demuestre que:

   $$W(t+\pi) = W(t)W(\pi) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

   (b) Suponga que la matriz $W(\pi)$ tiene un valor propio $\lambda = 1$. Muestre que en tal caso el sistema posee una soluci'on $X(t)$ periódica de período π

4. Encuentre e^{tA} para las siguientes matrices

   (a) $A = \begin{pmatrix} 3 & -4 & -4 \\ 3 & 5 & 2 \\ -6 & 4 & 7 \end{pmatrix}$

   (b) $A = \begin{pmatrix} -4 & 8 \\ -8 & -4 \end{pmatrix}$

   (c) $A(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda_2 & 1 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix}$

   En los casos:

   i. $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda$

   ii. $\lambda_1 = \lambda_2 = 3,\ \lambda_3 = 2$

5. Considere la ecuación diferencial escalar de orden n:

$$(*)\ L(y) = y^{(n)}(t) + a_1 y^{(n-1)} + ... + a_n y = f(t).$$

Sea $v(t)$ la solución de la ecuación $L(v) = 0$ con condiciones iniciales $v(0) = \ldots = v^{(n-2)}(0) = 0,\ v^{(n-1)}(0) = 1$. Demuestre que

$$y(t) = \int_0^t v(t-s) f(s) ds$$

es una solución de $(*)$. Para ello transforme $(*)$ en un sistema de ecuaciones de la forma $\dot{x} = A(t)x + B(t)$ y pruebe que la columna n de e^{At} es $(v(t), v'(t), \ldots, v^{(n-1)}(t))$.

6. Estudie las soluciones y el diagrama de fase del problema $\dot{x} = Ax$ con $A = \begin{pmatrix} -\mu & b \\ a & \mu \end{pmatrix}$

7. Sea el sistema $\dot{x} = Ax$, tal que A es antisimétrica, es decir que $A^T = -A$.

   Demuestre que si $x_1(t), x_2(t) \in\ R^n$ son soluciones del sistema y ortogonales en algún t_0, entonces $x_1(t)$ y $x_2(t)$ son ortogonales para todo t.

8. Dibuje las trayectorias de los siguientes sistemas, indicando las direcciones (flechas) en las cuales éstas son recorridas. Sea riguroso.

$$\dot{x} = 2x + y, \quad \dot{y} = 3x + 4y.$$

$$\dot{x} = -x, \quad \dot{y} = x + y.$$

9. Encuentre todos los puntos singulares de los sistemas

$$\dot{x} = -y + xy, \quad \dot{y} = -x + y + xy - 1$$

$$\dot{x} = \sin x + \sin y, \quad \dot{y} = -x + y$$

y determine el carácter de cada uno de ellos (estabilidad y tipo de punto singular).

10. Considere el sistema

$$\dot{x} = y, \quad \dot{y} = -x + f(x), \tag{1}$$

donde $f : R \to R$ es continuamente diferenciable. Denotaremos $F(s) = 2\int_0^s f(\tau)d\tau$.

(a) Demuestre que toda solución $(x(t), y(t))$ de (1) satisface que para alguna constante $C > 0$,

$$x(t)^2 + y(t)^2 = C + F(x(t)) \quad \forall\, t > 0. \tag{2}$$

(derive $x^2 + y^2 - F(x)$).

Supondremos en lo que sigue que $f(0) = 0$, y que para cierto $\rho > 0$, y todo s tal que $|s| \leq \rho$, se tiene

$$|F(s)| \leq \frac{1}{2}s^2. \tag{3}$$

(b) Se le propone en esta parte demostrar que el punto singular de (1), $(0,0)$, es *estable.*

Para ello, considere cualquier número ε con $0 < \sqrt{\varepsilon}$una solución de (1) tal que $x(0)^2 + y(0)^2 < \frac{\varepsilon}{4}$. Usando el esquema a continuación, muestre que

$$x(t)^2 + y(t)^2 < \varepsilon \quad \text{para todo } t > 0. \tag{4}$$

(i) Muestre que el número C en (2) para esta solución satisface que $C < 3\varepsilon/8$.

(ii) Suponga, por contradicción, que en un cierto $t_0 > 0$ la soluci'on satisface que $x(t_0)^2 + y(t_0)^2 = \varepsilon$. Usando (i), (2) y (3), concluya que esto es imposible, por ende que (4) se cumple y que $(0,0)$ es estable.

(c) Pruebe que ninguna solución de (1) $(x(t), y(t))$ (excepto (0,0)), satisface que $(x(t), y(t)) \to (0,0)$ si $t \to \infty$, en particular $(0,0)$ no es asint'oticamente estable. (Suponga que tal soluci'on existe. Muestre primero que el C correspondiente en (2) debe ser cero. Concluya una contradicción usando (3).

(d) Considere la ecuaci'on de segundo orden

$$\ddot{x} + x - x^n = 0,$$

con $n > 1$. Muestre que no hay soluciones no-nulas de esta ecuaci'on que tiendan a cero en $+\infty$.

Nota *Se recomienda estudiar los problemas de los controles. Recuerden que para el control 2 se dejó una pauta en fotocopiadora y que el examen cubrirá toda la materia del curso. Suerte. J.*