Departamento de Ingeniería Matemática. U. de Chile.
MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Guía de Problemas No Lineales

Semestre Primavera 1999. Prof.: Axel Osses

P1.– Para el punto crítico $(0,0)$ de cada uno de los siguientes sistemas autónomos lineales, determine si **(i)** es o no aislado. En caso de ser aislado determine **(ii)** su naturaleza (nodo, pto. silla, pto. espiral, etc.) y **(iii)** sus propiedades de estabilidad (estabilidad, estabilidad asintótica, inestabilidad). Cuando corresponda dé la dirección de las rectas tangentes o asíntotas que aparezcan y esboce un diagrama de fases.

$$(a)\left\{\begin{array}{rr} x' = & -x-2y \\ y' = & 4x-5y \end{array}\right. \qquad (b)\left\{\begin{array}{rr} x' = & 4x-3y \\ y' = & 8x-6y \end{array}\right. \qquad (c)\left\{\begin{array}{rr} x' = & -3x+4y \\ y' = & -2x+3y \end{array}\right.$$

$$(d)\left\{\begin{array}{rr} x' = & -4x-y \\ y' = & x-2y \end{array}\right. \qquad (e)\left\{\begin{array}{rr} x' = & 5x+2y \\ y' = & -17x-5y \end{array}\right. \qquad (f)\left\{\begin{array}{rr} x' = & 4x-2y \\ y' = & 5x+2y \end{array}\right.$$

Soln: (a) pto. espiral a. estable, (b) pto. crítico no aislado, (c) pto. silla inestable, (d) nodo a. estable, (e) centro estable pero no a. estable, (f) pto. espiral inestable.

P2.– Considere las vibraciones de una masa sujeta a un resorte:

$$x'' + 2bx' + a^2x = 0,$$

donde $a > 0$ y $b \geq 0$ son constantes que representan el roce y la rigidez del resorte, respectivamente.

(i) Definiendo $y = x'$, reescriba la ecuación como un sistema de primer orden en las variables x e y. Pruebe que su único punto crítico es $(0,0)$ y que es aislado.

(ii) Hallar los valores propios asociados a este sistema.

(iii) En los cuatro casos:

$$1)\ b=0\ ,\quad 2)\ 0<b<a\ ,\quad 3)\ b=a\ ,\quad 4)\ b>a,$$

describa la naturaleza y las propiedades de estabilidad del punto crítico $(0,0)$. Dé una interpretación física del movimiento de la masa en cada caso.

Soln: 1) centro estable pero no a. estable, mov. periódico, 2) pto. espiral a. estable, mov. oscilatorio amortiguado, 3) nodo a. estable, mov. amortiguado sin oscilaciones, 4) ídem que 3).

P3.– Considere los sistemas no lineales autónomos siguientes:

$$(a)\left\{\begin{array}{rc} x' = & 4x+2y+2x^2-3y^2 \\ y' = & 4x-3y+7xy \end{array}\right. \text{ pto crítico } (0,0)\ , \qquad (b)\left\{\begin{array}{rc} x' = & 33-10x-3y+x^2 \\ y' = & -18+6x+2y-xy \end{array}\right. \text{ pto crítico } (4,3).$$

(i) Calcule la matriz jacobiana asociada a ambos sistemas.

(ii) Determine las linealizaciones de (a) y (b) en torno a los puntos críticos indicados.

(iii) ¿Son los sistemas (a) y (b) casi-lineales en torno a estos puntos críticos? (Estudie el determinante de los sistemas linealizados).

(iv) Determine el tipo y estabilidad de los puntos críticos indicados en (a) y (b) a partir de las características de los sistemas linealizados. Esboce una aproximación de los diagramas de fases de (a) y (b) cerca de los puntos críticos.

Soln: ambos casi-lineales. (a) pto. silla inestable, (b) pto. espiral a. estable.

P4.– Considere el sistema depredador-presa siguiente, en que x e y representan dos poblaciones en competencia:

$$\begin{cases} x' = & x^2 - 2x - xy \\ y' = & y^2 - 4y + xy. \end{cases}$$

(i) Demuestre que los puntos críticos son $(0,0)$, $(0{,}4)$, $(2,0)$ y $(3,1)$.

(ii) Pruebe que $(0,0)$ es un nodo asintóticamente estable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias son tangentes al eje x, excepto dos que reposan sobre el eje y

(iii) Pruebe que $(0,4)$ es un punto silla inestable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias entran a lo largo de la recta que pasa por $(0,4)$ con pendiente $-2/5$, excepto dos trayectorias que salen a lo largo del eje y.

(iv) Pruebe que $(2,0)$ es un punto silla inestable del sistema linealizado, en que todas las trayectorias entran a lo largo de la recta que pasa por $(2,0)$ con pendiente 2, excepto dos trayectorias que salen a lo largo del eje x.

(v) Pruebe que $(3,1)$ es un punto espiral inestable del sistema linealizado.

(vi) Esboce el diagrama de fases aproximado para $x \geq 0$ e $y \geq 0$.

(vii) A partir del diagrama, justifique la siguiente afirmación: *en el universo de este modelo o bien las dos poblaciones crecen indefinidamente hasta el día del juicio final o bien ambas están condenadas a desaparecer.*

Nota: Ver también sugerencias de preguntas referentes a problemas no lineales de exámenes y controles de años anteriores como está indicado en la página web del curso: `www.dim.uchile.cl/~axosses/edo.html`