Guía de Sistemas de Ecuaciones

MA26A-03

Semestre 95/1

Prof. Salomé Martínez
Aux. Manuel Reyes

1
a) Sea $T \in M_{nn}(R)$, encontrar su descomposición $T = N + S$, si

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} -3 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{2}{3} & -1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ -\frac{2}{3} & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

b) Calcular e^{At} en cada caso.

2 (Control 2, MA26A Semestre otoño de 1994).
Demuestre que si $A \in R^{n\times n}$ es tal que e^{At} existe, $\forall t \in R$, entonces

$$det\ e^{At} = e^{tr\ At}$$

donde si $A = (a_{ij})_{i,j\in\{1,\ldots,n\}}$ la *traza* $A = tr\ A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

Indicación. Demuestre que si $A(t) = (a_{ij}(t))_{i,j} = (A_i(t))_i$ con $A_i(t) \in R^n$, entonces

$$\frac{d}{dt} det\ A(t) = \sum_i |A_1(t)\ldots A_i'(t)\, A_{i+1}(t)\ldots A_n(t)|,$$

y que la traza es invariante bajo cambios de coordenadas.

3 Dibujar el diagrama de fase de $\dot{x} = Ax$, con $x \in R^n$ y

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad A_3 = \begin{bmatrix} \alpha & \beta & 0 \\ -\beta & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

4 Se desea resolver el problema

$$\dot{x} = Ax + b(t), \tag{1}$$

con $A \in M_{nn}(R)$, $x \in R^n$ y $b : R \to R^n$.
a) Demuestre que $\frac{d}{dt}(e^{At}) = A\, e^{At}$.
b) Use variación de constantes para resolver (??).

5 Sea el problema $P(D)y = 0$, con D el operador diferencial y P el polinomio característico. Ver que si P puede escribirse como

$$P(D) = Q(D)\,(D - \lambda)^n,$$

entonces A no es diagonalizable.

6 Resolver $\ddot{x} = Ax$, con A simétrica y

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

Definición. *Un punto de equilibrio del sistema $\dot{x} = f(x)$, con $f : R^n \to R^n$, es un $\bar{x}$ tal que $f(\bar{x}) = 0$.*
Notar que estos puntos son soluciones por si solos y además son únicos.

7 Físicos varios
a) Sea un resorte de constante k y largo natural l_0, atado a una masa m. El modelo que lo representa es $m\ddot{x} = -k(x - l_0)$.
i) Dibujar el diagrama de fase.
ii) ¿Qué representan los puntos de equilibrio?.

b) Idem el mismo resorte, pero con roce.

c) Sea el mismo resorte perturbado con un oscilador que le ejerce una fuerza $f_0 \operatorname{sen} \omega t$.
i) Resolver el problema como un sistema (problema 3).
ii) ¿Tiene sentido dibujar el diagrama de fase?, ¿Por qué?

d) (Control de FI10A 1993)
Sea un tablón sobre dos troncos girando como en la figura. Entre los maderos hay un roce μ.
La ecuación de movimiento del centro de masa del tablón es $m\ddot{x} = \frac{mg}{a}\, x$.
Estudiar el diagrama de fase e interpretar el equilibrio.

e) (Control 2 de FI21B semestre otoño de 1995 (ahora!!))
El sistema de la figura está en equilibrio cuando la barra AB está horizontal. Si los dos resortes son iguales y la ecuación de movimiento es $I\ddot{\theta} + \frac{1}{2}mgl\cos\theta - \frac{5}{2}(kl)^2 \operatorname{sen}\theta\cos\theta = 0$, para pequeñas oscilaciones
i) Estudiar el diagrama de fase e interpretar.
ii) Encontar el período de las oscilaciones.

8 Más físicos
a) Sea el péndulo simple de masa m y largo natural l_0. Si su ecuación de movimiento es

$$m\, l_0^2\, \ddot{\theta} = -m\, g\, l_0 \operatorname{sen}\theta,$$

con $\theta(\tau)$ el ángulo que genera el hilo del péndulo con la vertical, en el tiempo τ, y $\dot{\theta} = \frac{d}{d\tau}\theta$.
i) Encontar un cambio de variables que lo transforme a una ecuación sin unidades

$$y'' + \operatorname{sen} y = 0, \tag{2}$$

con $y'(t) = \frac{d}{dt}y$.

Respuesta $t = \sqrt{\frac{g}{l_0}}\tau$.

Ahora, estudiamos su diagrama de face cerca de los puntos de equilibrio.
Para ello
ii) Encuéntrelos.
iii) Escriba la ecuación (??) como un sistema $\dot{z} = F(z)$, donde $z(t) = (\frac{y(t)}{y'(t)})$ y encuentre la aproximación lineal de $F(z)$.
iv) Estudie el diagrama de fase en los puntos de equilibrio $\bar{z}$ e interprete.

b) Sea el péndulo simple cuya base gira con velocidad angular constante ω como muestra la figura.
Preguntas: Idem a)

9 Una partícula está sometida a un potencial $V(x) = E_0 + (x - \bar{x})^2$, con $E_0 \in R$ y $x, \bar{x} \in R^2$.
a) Sabiendo que la fuerza generada por este potencial es $F(x) = -\nabla V(x)$, escribir el sistema que lo representa.
b) Estudiar el diagrama de fase e interpretar.
c) ¿Qué representan E_0 y $\bar{x}$?. Ver además, la relación entre la curva de potencial y el diagrama de fase.

10 (Control 2 MA26A semestre otoño de 1994). Sea la matriz A_3 del problema 1. Encuentre la solución de $x' = Ax$, tal que $x(0) = (1, 1, ..., 1)^T$ y la solución general de este sistema.

Indicación. Encuentre la matriz solución.

Consultas a:

`manreyes@cipres.cec.uchile.cl`