Examen Recuperativo MA26A–02 Otoño 2001

ECUACIONES DIFERENCIALES ORDINARIAS

Profesor: Axel Osses, Prof. Auxiliar: Francisco Ortega

U. DE CHILE INGENIERIA

P1.–

(i) Resuelva usando Transformada de Laplace la ecuación

$$my'' + ky = f(t), \ y(0) = 0, \ y'(0) = 0,$$

donde

$$f(t) = \begin{cases} 0 & t \leq a \\ 1/\varepsilon & a < t \leq a + \varepsilon \\ 0 & t \geq a + \varepsilon \end{cases}$$

(ii) Usando el resultado de (**i**), pruebe que $z(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} y(t)$, $t \geq 0$ satisface la ecuación

$$mz'' + kz = 0, \ z(a) = 0, \ z'(a) = 1/m.$$

P2.– Considere el sistema de dos estanques de igual sección transversal S, unidos por una tubería de sección A y largo L(ver figura). Inicialmente el nivel de los estanques es el mismo y el sistema está en equilibrio(ie, $\frac{dz1}{dt}(t = 0) = \frac{dz2}{dt}(t = 0) = 0$). En el instante $t = 0$ comienza a descargarse en el estanque de la derecha un caudal $Q(t) = \alpha t$, con $\alpha > 0$ constante.

La ecuación diferencial que modela el sistema antes descrito cuando el el flujo que circula por la cañería es laminar es:

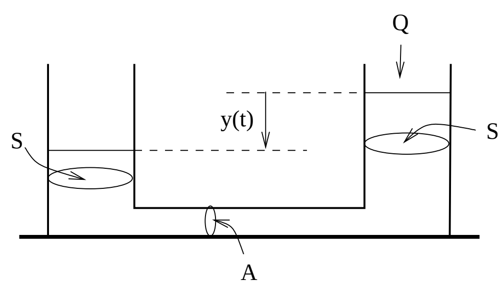
$$\frac{d^2y}{dt^2} + a\frac{dy}{dt} + by = c + act \qquad \forall t \geq 0$$

$$y(0) = 0 \quad \frac{dy}{dt}(0) = 0$$

Donde $y = z_2 - z_1$ es la diferencia de nivel de los estanques, $a = \frac{32\nu}{D^2} > 0$, $b = \frac{2Ag}{SL} > 0$, $c = \frac{\alpha}{S} > 0$, con $\nu =$ viscosidad cinemática del fluido.

(i) Encuentre la única solución $y(t)$ cuando no existen pérdidas friccionales en el sistema (ie. cuando $a = 0$ ya que $\nu = 0$).

(ii) Encuentre la solución general $y(t)$ cuando $a \neq 0$, analizando separadamente los casos $a^2 = 4b$, $a^2 > 4b$ y $a^2 < 4b$. Esquematice gráficamente la solución en cada caso en función de t.



P3.– Considere el siguiente sistema no lineal:

$$(SNL1) \begin{cases} x' = -y + x(1 - x^2 - y^2) \\ y' = x + y(1 - x^2 - y^2) \\ x(0) = r_0 > 0, \ y(0) = 0 \end{cases}$$

(i) Demuestre que el único punto crítico es el $(0, 0)$.

(ii) Tomando $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ y derivando las expresiones $x^2 + y^2 = r^2$ e $\theta = \arctan(y/x)$ deduzca que:

$$xx' + yy' = rr', \qquad xy' - x'y = r^2\theta.$$

(iii) Multiplicando en (SNL1) la primera ecuación por x, la segunda por y y luego la primera por y y la segunda por x y combinando deduzca que:

$$(SNL2)\begin{cases} r' = r(1-r^2) \\ \theta' = 1 \\ r(0) = r_0,\ \theta(0) = 0 \end{cases}$$

Analizando directamente este sistema explique qué ocurre si $r_0 = 1$.

(iv) Resuelva y demuestre que:

$$r^2(t) = \frac{1}{1+k_0 e^{-2t}}, \qquad k_0 = \frac{1-r_0^2}{r_0^2}, \qquad \theta(t) = t.$$

(v) Si $r_0 < 1$ demuestre que $r(t) < 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$. Análogamente pruebe que si $r_0 > 1$ entonces $r(t) > 1$, $\forall t \geq 0$ y que $\lim_{t\to\infty} r(t) = 1$.

(vi) Haga un diagrama de fases considerando el análisis de los puntos anteriores.

Tiempo 3hrs.