PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2004

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIDAD N°1
ECUACIONES DE PRIMER ORDEN

Variables Separables

P1) Resuelva las siguientes ecuaciones:

a) $\dfrac{dy(x)}{dx} - y(x) = 0$

b) $\dfrac{dT}{dt} = k(T - T_m)$ [1]

c) $\dfrac{dx}{dt} = (2-x)(1-x)$

d) $\dfrac{dx}{dt} = kx(n+1-x)$

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{xy+3x-y-3}{xy-2x+4y-8}$

f) $\dfrac{dy}{dx} = y^2 - 4$

g) $\dfrac{dy}{dx} = 3y^{\frac{2}{3}}$

h) $xy^4 dx + (y^2+2)e^{-3x} dy = 0$

i) $2t^3 y^2 dt + t^3 y^2 dy = 0$

j) $\dfrac{dx}{dy} 4(x^2+1), \quad x(\pi/4) = 1$

k) $\dfrac{dy}{dx} = 1 + y^2$

l)
$\dfrac{dy}{dx} = \sin(x)(\cos(2y) - \cos^2(y))$

m) $2\dfrac{dx}{dt} = x^3 \cos(t)$

n) $y\dfrac{dy}{dt} = \dfrac{3t^2+4t+2}{2y+1}$,
$y(0) = -1$

[1] MA26A Sección 1, Semestre Otoño 2004

P2) (P1 C1 2001, prof. R. Manasevich)
Resolver

a) $$y' = \frac{y}{x(\log(y) - \log(x) + 1)},\ y(1) = e$$

b) $$y' = 1 + e^{y-x+5}$$

c) $$y'' = \frac{\cos(t)}{y'e^{y'^3} + 1}$$

además en este caso a partir de la expresión encontrada demuestre que se puede resolver para y' en forma única.

P3) (P4 C1 2001, prof. R. Manasevich)
La ecuación:

$$\frac{dP}{dt} = P(a - b\log(P))$$

se utiliza en el pronóstico de crecimiento de poblaciones. En esta ecuación *a>0* y *b* son constantes.

a) Encuentre la solución de esta ecuación en términos de *a, b*, $P_0 = P(0) > 0$ y *t* .
b) Describa el comportamiento de P(t) cuando $t \to \infty$, (considere los casos *b*>0 , *b*<0)

P4) Un esquiador de masa M baja por una ladera inclinada con un ángulo α respecto a la horizontal, sometiendo además de la fuerza de roce cinética con la nieve con constante μ_k una fuerza de roce viscosa de la forma $-2\beta m\vec{v}$
La ecuación de movimiento del esquiador es:

$$mg\sin\alpha - 2\beta m\frac{dx}{dt} - \mu_k mg\cos\alpha = m\frac{d^2x}{dt^2}$$

Si $\tan(\alpha) > \mu_k$:

a) Determine la rapidez del esquiador en función del tiempo $(\frac{dx}{dt}(t))$
b) Determine la rapidez límite, es decir cuando $t \to \infty$.
c)Determine la posición en función del tiempo $(x(t))$

P5) Resuelva

a) $$\frac{dy}{dx} = 2 + \sqrt{y - 2x + 3}$$

b) $$\frac{dy}{dx}=\frac{1-x-y}{x+y}$$

c) $$xyy'=3y^2+x^2, \qquad y(-1)=2$$

d) $$xy^2\frac{dy}{dx}=y^3-x^3$$

e) $$\frac{dy}{dx}=(-5x+y)^2-4$$

P6) Resuelva la ecuación no lineal:

$$y'(t)=ty^{1/2} \quad , \quad y(0)=0$$

P7) (P4 (i) Examen 2001, Prof. R. Manasevich)
Considere la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{dy}{dx}=\sin(x-y)$$

Encuentre la solución general y el dominio de definición de esta solución. Encuentre una solución de esta ecuación que satisfaga $y(\pi/2)=0$

P8) (P3 C1 2000, Prof. R. Manasevich)
Encuentre la solución (o soluciones) para el problema con condición inicial:

$$y''=3y^5 \qquad y(0)=1, \ \ y'(0)=1$$

Es la solución a este problema única? Encuentre el intervalo maximal donde está definida la solución (o las soluciones) y dibuje estas soluciones.

P9) (P2 C1 2002, Prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial

$$y''+p(t)y'+q(t)y=0$$

donde $p,q:I\to\Re$ son dos funciones continuas que se pide determinar bajo la condición de que

$$y_1(t)=\sin t^2, \quad y_2(t)=\cos t^2$$

formen una base de soluciones de esta ecuación.
Determine claramente los intervalos reales I donde este problema admite solución.

P10) (P3 C1 2002, Prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación de Clairaut

$$y=ty'-\frac{1}{4}(y')^2.$$

Demuestre que

$$y(t) = Ct - \frac{1}{4}C^2$$

es una solución uniparamétrica de esta ecuación (2 ptos)

Encuentre cual de las siguientes funciones: $y(t) = t^2, y(t) = t^3, y(t) = e^t$, es una solución de la ecuación diferencial y haga un gráfico donde incluya esta última solución así como la familia uniparamétrica de soluciones, indicando la relación geométrica entre estas soluciones (4 puntos).

P11) (P2i Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

(i) Considere la siguiente ecuación no lineal:

$$\frac{dy}{dx} = (x + y)^2$$

Encuentre la solución que satisface $y(0) = 0$, y dé el dominio de definición de esta solución.

P12) (P2a Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)

Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2 + \beta ty}{t^2 + \alpha ty}.$$

P13) (P4 Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)

a) La velocidad de enfriamiento de un cuerpo en el aire es proporcional a la diferencia entre la temperatura T del cuerpo y la temperatura T_0 del aire, es decir

$$\frac{dT}{dt}. = K(T - T_0), K > 0.$$

Determine T(t).

b) Si T_0=20 grados Celcius y el cuerpo se enfría desde 100 a 60 grados Celcius en veinte minutos se pide calcular en cuanto tiempo la temperatura del cuerpo descenderá hasta 30 grados Celsius.

c) Cual es la temperatura limite $(t \to \infty)$ del cuerpo?

Ecuaciones de primer orden lineales

P1) Resuelva las siguientes Ecuaciones Lineales:

a) $y' + 4y = e^{-t}, \qquad y(0) = 4/3$

b) $y'sen(x) = x - y\cos(x), \qquad y(\pi/2) = 1$

c) $\frac{dy}{dt} + y\cot(t) = 2\cos(t), \qquad y(\pi/2) = 2$

d) $x\dfrac{dy}{dx}-4y=x^6e^x$

e) $x\dfrac{dy}{dx}+y=2x, \qquad\qquad y(1)=0$

f) $\dfrac{dr}{d\theta}+r\sec\theta=\cos\theta$

P2) (P2 C1 2001. Prof. R. Manasevich)
Considere el problema con condición inicial:

$$(1+x^2)y'+2xy=f(x), \qquad y(0)=0$$

donde

$$f(x)=\begin{cases} x & si\ \ x\in[0,1) \\ -x & si\ \ x\geq 1 \end{cases}$$

Encuentre una solución continua, (no de clase C^1) de este problema.
Evalúe $y'(1_+), y'(1_-)$ y demuestre que $y'(1_+)-y'(1_-)=-1$.

P3) Se tiene un sistema dinámico de primer orden de tiempo continuo, definido por la ecuación diferencial

$$\dot{Y}(t)+4Y(t)=2U(t), \quad Y(0)=1.$$

Suponga que la entrada U(t) es un proceso estocástico de valor medio $\eta_U=2t$ y función de autocorrelación $R_{UU}(t_1,t_2)=t_1t_2$. Se pide analizar el proceso estocástico de salida Y(t), encontrando su valor medio $\eta_Y(t)$ y autocorrelación $R_{YY}(t_1,t_2)$.
Para esto tendrá que resolver las ecuaciones:

$\dot{\eta}_Y+4\eta_Y=4t$ para encontrar el valor medio $\eta_Y(t)$

$\dfrac{\partial R_{UY}(t_1,t_2)}{\partial t_2}+4R_{UY}(t_1,t_2)=t_1t_2$ para encontrar $R_{UY}(t_1,t_2)$ necesario para calcular la autocorrelación que se obtiene a partir de la ecuación

$$\frac{\partial R_{YY}(t_1,t_2)}{\partial t_1}+4R_{YY}(t_1,t_2)=R_{UY}(t_1,t_2).$$

Ecuaciones de Bernoulli y de Ricatti.

P1) Resuelva las siguientes Ecuaciones:

a) $$x\frac{dy}{dx}+y=x^2y^2$$

b) $$\frac{dy}{dx}-5y=-\frac{5}{2}xy^3$$

c) $$y'+xy^2-(2x^2+1)y+x^2+x-1=0$$

d) $$y'=-ty+ty^2$$

e) $$y'+(\cot(t))y+\frac{1}{sen(t)}y^2=0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

P2)
a) Muestre a que tipo de ecuación se reduce la ecuación de Ricatti usando la siguiente sustitución.

$$y(x)=y_1(x)+\frac{1}{z(x)}$$

b) Observe que $y_1(x)=\frac{2}{x}$ es solución de

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{4}{x^2}-\frac{1}{x}y+y^2$$

Usando lo realizado en la parte a) encuentre la solución de esta ecuación tal que $y(1)=3$

P3) (P1 Control 1 2002, Prof. R. Manasevich)
Mediante sustituciones adecuadas resuelva la ecuación diferencial no lineal

$$y'-4y\log y+2ty(\log y)^3=0,$$

y encuentre la solución que satisface $y(0)=e^{-\frac{1}{4}}$. Demuestre que el dominio de definición de esta solución incluye el intervalo $[0,\infty)$.
Sugerencia. Transforme primero la ecuación en otra no lineal pero conocida.

P4) (P1 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)
Resuelva las ecuaciones:

i) $$y'+(\cot x)-\frac{1}{\sin x}y^2=0, \qquad y\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

ii) $$y'-5y=-\frac{5}{2}xy^3$$

P5) (P2b Control 1 2003, Prof. R. Manasevich)
Resuelva la siguiente ecuación diferencial:

$$y' = \frac{y^2}{(m+n)^2} - \frac{4mn}{(m+n)^2}y - (m-n)^2.$$

Ecuaciones exactas y factores integrantes.

P1) Verificar si las siguientes Ecuaciones Diferenciales son exactas o no, en caso de serlo resuelva:

a) $(x^2 + \frac{y}{x})dx + \ln(x+2y)dy = 0$ **R:** No es exacta

b) $(ye^{-x} - \text{sen}(x))dx - (e^{-x} + 2y)dy = 0$ **R :** $\cos x - ye^{-x} - y^2 = C$

c) $2y(y-1)dx + x(2y-1)dy = 0$ **R:** No es exacta

d) $(2xy^2 - y\,\text{sen}(x) + 2x - 1)dx + (2x^2 y + \cos(x) + \frac{1}{y})dy = 0$

R: $x^2 y^2 + y\cos(x) + x^2 - x + \ln(y) + C$

e) $(1 - y^2)dx + (1 - x^2)dy = 0$ **R:** No es exacta

P2) Determine k tal que la ecuación sea exacta:

$((2x - y\,\text{sen}(xy)) + ky^4)dx - (20xy^3 + x\,\text{sen}(xy))dy = 0$ **R:** k= -5

P3) Resuelva:

$(\cos(x)\text{sen}(x) - xy^2)dx + y(1-x^2)dy = 0$ **R:** $\frac{y^2}{2}(1-x^2) + \frac{\text{sen}^2(x)}{2} = C$

P4) Resuelva como ecuación exacta y como ecuación homogénea:

$\frac{4y^2 - 2x^2}{4xy^2 - x^3}dx + \frac{8y^2 - x^2}{4y^3 - x^2 y}dy = 0$ **R:** $x^2 y^2 (4y^2 - x^2) = c$

P5) Hallar el valor de n para el cual cada una de las ecuaciones siguientes es exacta y resolverlas para ese valor de n:

a) $(xy^2 + nx^2 y)dx + (x^3 + x^2 y)dy = 0;$ **R:** $n = 3, (xy)^2 + 2x^3 y = c;$

b) $(x + ye^{2xy})dx + nxe^{2xy}dy = 0;$ **R:** $n = 1, x^2 + e^{2xy} = c;$

P6) Resolver cada una de estas ecuaciones hallando un factor integrante:

a) $(3x^2 - y^2)dy - 2xydx = 0;$ **R:** $\mu = \frac{1}{y^4}, x^2 - y^2 = cy^3;$

b) $(xy - 1)dx + (x^2 - xy)dy = 0;$ **R:** $\mu = \frac{1}{x}, 2xy - \log x^2 - y^2 = c;$

c) $xdy + ydx + 3x^3 y^4 dy = 0;$ **R:** $\mu = \frac{1}{(xy)^3}, 3x^2 y^4 = 1 + cx^2 y^2;$

d) $e^x dx + (e^x \cot g(y) + 2y\cos ec(y))dy = 0;$ **R:** $\mu = \text{sen}\, y, e^x \,\text{sen}(y) + y^2 = c;$

e) $(x+2)\text{sen}(y)dx + x\cos(y)dy = 0;$ **R:** $\mu = xe^x, x^2 e^x \,\text{sen}(y) = c;$

f) $\left(x^3 + xy^3\right)dx + 3y^2 dy = 0;$ **R:** $\mu = e^{\frac{x^2}{2}}, e^{\frac{x^2}{2}}\left(y^3 + x^2 - 2\right) = c;$

P7) Considere la ecuación diferencial no exacta $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde M y N son de clase C^1. Demuestre que si $\dfrac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial x}\right)}{(Ny - Mx)}$, es una función g(z) del producto z=xy, entonces la ecuación diferencial tiene un factor integrante de la forma u=u(z) y encuéntrelo.

P8) (P2 C1 1995, Prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial $M(x,y)dx + N(x,y)dy = 0$, donde M, N son de clase C^1 y suponga que existen dos funciones f, h $\in C^1$ tal que $f(x)M(x,y) + h(y)N(x,y) = 0.$ Encuentre la solución de la ecuación diferencial en un dominio $D \subset \Re^2$, donde $f(x) \neq 0$ y $h(y) \neq 0$.

P9) (P3 Control 2 2002, Prof. R. Manasevich)

(a) $\left(1 + \log x + \dfrac{y}{x}\right)dx - \left(1 - \log x\right)dy = 0;$

(b) $\left(\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)y' + \dfrac{x}{2y^4} = 1, y(1) = 1$

(c) $\left(4y + 9x^2\right)dy + 6xydx = 0;$

P10) (P4 Control 2 2002, Prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial no exacta: $M(t,y)dt + N(t,y)dy = 0$, donde M, N son de clase C^1. Demuestre que si $\dfrac{\left(\dfrac{\partial M}{\partial y} - \dfrac{\partial N}{\partial t}\right)}{y^{m-1}t^{n-1}(nyN - mtM)}$,
es una función de $z=t^n y^m$, entonces la ecuación diferencial tiene un factor integrante de la forma $\mu = \mu(z)$.
(b) Si ahora M(t,y)=y f(ty) y N(t,y)=t g(ty), para ciertas funciones f y g de clase C^1.
Demuestre que $\mu(t,y) = \dfrac{1}{tM - yN}$, es un factor integrante de la ecuación.

P11) (Tarea 3, 2002, Prof. R. Manasevich)

a) $\left(\dfrac{3y^2 - x^2}{y^5}\right)dy + \dfrac{x}{2y^4}dx = 0$

b) $\left(\dfrac{1}{x} + \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{y}{x^2 + y^2}\right)dx + \left(ye^y + \dfrac{x}{x^2 + y^2}\right)dy = 0$

c) $\left(-xy\sin(y) + 2x\cos(y)\right)dy + 2y\cos(y)dx = 0$

d) $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{y}{x^2+y^2}\right)dx+\left(ye^y+\frac{x}{x^2+y^2}\right)dy=0$

e) Determine N(x,y) tal que la siguiente ecuación sea exacta y resuelva

$$\left(y^{\frac{1}{2}}x^{-\frac{1}{2}}+\frac{x}{x^2+y}\right)dx+N(x,y)dy=0.$$

P12) (P4 Control 3 2003, Prof. R. Manasevich)

Resuelva las siguientes ecuaciones:

i) $\sin(x)\cosh(y)dx-\cos(x)senh(y)dy=0, y(0)=0$

ii) $(x+3x^3sen(y))dx+x^4\cos(y)dy=0$

P13) (P5 Control 3 2003, Prof. R. Manasevich)

Sea la ecuación

$$(5x^2y+6x^3y^2+4xy^2)dx+(2x^3+3x^4y+3x^2y)dy=0.$$

i) Demuestre que esta ecuación admite un factor integrante de la forma $\mu(x^ny^m)$

ii) Encuentre el factor integrante correspondiente y resuelva la ecuación.