PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2004

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIDAD N°2
ECUACIONES LINEALES DE ORDEN N Y APLICACIONES

Dependencia e Independencia Lineal, Lineales Homogéneas

P1) (P3 C1 2001, Prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial:

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

donde $p, q : I \to R$ son dos funciones continuas

a) Demuestre que el Wronskiano $W(t) = W(y_1, y)(t)$ de dos soluciones $y(t), y_1(t)$ de la ecuación satisface:

$$W(t) = Ce^{-\int p(t)dt}$$

b) Encuentre a continuación una expresión para $\frac{d}{dt}\left(\frac{y(t)}{y_1(t)}\right)$ en términos $W(t)$ e $y_1(t)$. A partir de aquí y de (a) encuentre finalmente $y(t)$ en términos de $y_1(t)$.

P2) (P3 C2 2001, prof. R. Manasevich)
Sea la ecuación diferencial homogénea:

$$y''' + P(x)y'' + Q(x)y' + R(x)y = 0$$

donde suponemos que $P, Q, R : I \to R$ son tres funciones continuas definidas en un intervalo real I

a) Suponiendo que $y_1(t), y_2(t), y_3(t)$ forman una base de soluciones determine las funciones coeficientes P, Q, R en término de y_1, y_2, y_3.

b) De los resultados de a) determine la ecuación diferencial que tiene como base de soluciones a $y_1(t) = \sin(t), y_2(t) = \cos(t), y_3(t) = e^t$

P3) (P1 C1 2000, prof. R. Manasevich)
Considere la ecuación en m

$$m^2 + me^{\alpha t} + e^{2t} - 1 = 0, (*)$$

donde t y α son números reales.

a) Demuestre que para $\alpha \neq 2$ no existe m real que satisface (*) para todo t, pero que un tal m si existe $\alpha = 2$

b) Usando a) encuentre α tal que la ecuación diferencial:

$$y'' + e^{\alpha t} y' + (e^{2t} - 1) y = 0$$

tenga una solución explícita.

c) Complete entonces la base de soluciones y encuentre la solución general de la ecuación .

P4)

Sea y_1 a solución conocida de $a_2(x)y'' + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$, (**)

En intervalo I, en el cual $a_2(x) \neq 0$, pruebe que toda solución y de (**) satisface la ecuación diferencial de primer orden

$$y_1 \frac{dy}{dx} - y_1' y = f(x)$$

donde $f(x) = f(a_1(x), a_2(x))$. Usando lo anterior hallar base de solución para la ecuación

$$(1-x)y'' + 2xy' - 2y = 0$$

sabiendo que $y(x) = -x$ es solución.

P5)

Suponga que $y_1(t)$ es solución de $y'' + p(t)y' + q(t)y = 0$. Demuestre que $y_2(t) = y_1(t)v(t)$ es solución sí

$$\frac{dv}{dt} = \frac{ce^{-\int p(t)dt}}{y_1^{\,2}}$$

Hint: Evalúe y_2 en la ecuación.

P6) (C1 P4 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Resuelva las ecuaciones diferenciales:

(a) $t^2 y'' - 7ty' + 16y = 0$

(b) $t^2 y'' - ty' + 2y = 0$

P7) (Tarea 1, 2002, Prof. Raúl Manasevich)

Encontrando primero la base de soluciones resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

(1) $y'' = 10y' - 25y$

(2) $y''' + 3y'' - 4y' - 12y = 0$

(3) $y^{(iv)} - 2y'' + y = 0$

(4) $2y^{(v)} - 7y^{(iv)} + 12y''' + 8y'' = 0$

P8) (P1C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Sea Ψ una función continua definida en R con Ψ´ continua en R. Si Ψ(0)=1 y Ψ´(0)=0, se pide encontrar Ψ que satisface las siguientes ecuaciones diferenciales:

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + M(1-R)\Psi = 0 \qquad \text{para} \quad x \in (-\infty, 0];$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} - MR\Psi = 0 \qquad \text{para} \quad x \in (0,1);$$

$$\frac{d^2\Psi}{dx^2} + M(1-R)\Psi = 0 \qquad \text{para} \qquad x \in [1,\infty);$$

Donde M y R constantes positivas. 0<R<1.
Haga un bosquejo deΨ.

P9) (P3C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)
Un problema de ingeniería resulta ser modelado por la siguiente ecuación diferencial:

$$t^3y''' + 3(a+1)t^2y'' + (3a(a+1) - 3bc + 1)ty' + (a^3 + b^3 + c^3 - 3abc)y = 0,$$

donde a, b, c son parámetros constantes distintos y la variable t se interpreta como el tiempo.
a) Resuelva la ecuación en función de t, a, b y c tomando en cuenta que
(1) m=-(a+b+c) es solución de la ecuación cúbica

$$m^3 + 3am^2 + 3(a^2 - bc)m + a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = 0,$$

(2) $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - ac - bc)$.
b) Si $b = c = -\mu < 0,$ determine la solución en términos de t, a y μ .
c) Experimentalmente se ha determinado que $2\mu - a > 0, a > 0$ y $b = c = -\mu < 0,$ (como en la parte b)). Determine la solución y(t) que satisface $y(1) = \frac{1}{a+\mu}, y'(1) = 0$ y que es tal que y(t) tiende a cero cuando t tiende a infinito.

P10) (P5C1, 2003, Prof. Raúl Manasevich)
a) Sea $\lambda > 0$ en el problema

$$y^{(iv)} - \lambda y = 0$$
$$y(0) = y'(0) = y''(0) = 0 = y(1).$$

Estudie si existen valores de λ para los cuales el problema tiene solución no trivial.
b) Resuelva el problema $y^{(vi)} + y = 0$.

<u>Método de Coeficientes Indeterminados</u>

P1) (P1 Exámen 2001, Prof R. Manasevich)
Resuelva las ecuaciones:
a) $y'' + \omega^2 y = \sin \gamma t.$
b) $2y''' - 3y'' - 3y' + 2y = (e^x + e^{-x})^2$

P2) (P4 C2 2001, Prof R. Manasevich)
Determine la forma de una solución particular (en función de coeficientes indeterminados) para la ecuación

$$a_n y^{(n)} + ... + a_1 y' + a_0 y = g(t),$$

donde $a_n \neq 0,...,a_0$ son constantes, para los siguientes casos:
(a) $g(t) = e^t$, y se sabe que m = 1 es una raíz de multiplicidad, exactamente igual a 5, del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada.

(b) $g(t)=\cos t$, y se sabe que una raíz del polinomio característico de la ecuación homogénea asociada es m = i con multiplicidad exactamente igual a 3.

P3) (P2 Examen 2000, Prof R. Manasevich)

(i) $y''-2y'+y=e^{t}$.

(ii) $y'''-ky''=e^{kt}$.

P4) (P2(a) Control 1 2000, Prof R. Manasevich)
Resuelva la ecuación
$$y'''+ky''=e^{-kt},$$
donde k es un número positivo.

P5) (C1 P4b) ??, Prof R. Manasevich)
Resuelva:
$$y'''-6y''+9y'=te^{5t}.$$

P6) (P1 C2 1995, Prof R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial de orden n
$$P(D)=a_n y^{(n)}+\ldots+a_1 y'+a_0 y=g(t),$$
donde $g(t)=a\cos(\beta t)+bsen(\beta t), \beta\neq 0.$

Encuentre la forma de la solución particular de la ecuación diferencial.
Sugerencia: considere primero el caso en que el anulador de g no es factor de P(D).

P7) (P2 C2 1995, Prof R. Manasevich)
Encuentre la solución general de:

(a) $y'''-3y''+4y=te^{2t}-sent,$

(b) $y^{iv}+8y''+16y=\cos^2(t)$

P8) (P1 C2 2002, Prof R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial de orden n siguiente
$$P(D)y=a_n y^{(n)}+\ldots\ldots+a_1 y'+a_0 y=g(t)$$
donde a_i, $i=0,\ldots,n$ son constantes con $a_n\neq 0$. Suponga que
$$g(t)=t^{2ab-1}e^{abt}(a\cos bt+b\sin at)$$
donde a y b son enteros positivos.
Encuentre la forma de la solución particular considerando separadamente el caso en que el anulador de $g(t)$ no es un factor de $P(D)$ y el caso en que si lo es y con multiplicidades.

P9) (P2 C2 2002, Prof. R. Manasevich)
Use el método de los coeficientes indeterminados para resolver las siguientes ecuaciones diferenciales:

(a) $y^{iv} - y''' = x + e^x$

con $y(0) = y'(0) = y''(0) = y'''(0) = 0$

(b) $t^3 y''' + 3t^2 y'' + (1 - 3\alpha\beta)ty' + (\alpha^3 + \beta^3)y = t^{-(\alpha+\beta)} + \log t^{\alpha+\beta}$

sabiendo que $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a+b+c)(a^2 + b^2 + c^2 - bc - ac - ab)$

P10) (P5 C2 2002, Prof. R. Manasevich)
Considere el sistema de una masa oscilante en un medio viscoso sujeta a un resorte sobre la cual actúa una fuerza exterior periódica $F(t)=F_0\text{sen}(At)$ (A cte). De la formulación de la segunda ley de Newton resulta:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - \beta\frac{dx}{dt} + F(t)$$

k es la constante del resorte, β constante de amortiguación positiva y m la masa.

$$2\lambda = \frac{\beta}{m}\ ,\ \ \omega^2 = \frac{k}{m}$$

Encuentre x(t) usando el método de coeficientes indeterminados considerando las condiciones iniciales $x(0) = 1, x'(0) = 0$

Observación: Deberá analizar 3 casos: $\lambda^2 \succ \omega^2, \lambda^2 = \omega^2, \lambda^2 \prec \omega^2$

P11) (Tarea 1, 2004, Prof. Raúl Manasevich)
Resuelva a mano las siguientes ecuaciones diferenciales (pueden ocupar calculadora para los desarrollos numéricos):

i) $y^{(6)} + 72y'' - 1720y = 2\alpha\cosh(\sqrt{10t})$

ii) $y''' - 15y'' - 33y' + 847y = \beta e^{11t}$

$$\alpha = \left[\frac{\sum digitosmatrícula}{10}\right], \beta = \left[\frac{\sum digitos - rut(\sin verificador)}{30}\right]$$

(tomando la parte entera de los valores).

<u>Ayuda: Deducción de la fórmula de Cardano para Ecuaciones Cúbicas</u>.
La forma general de una ecuación cúbica es:

$$m^3 + Pm^2 + Qm + R = 0;$$

Pueden verificar que si m_1, m_2, m_3 son las soluciones de esta ecuación se cumplirán las siguientes relaciones:

(i) $m_1 + m_2 + m_3 = -P$

(ii) $m_1m_2 + m_1m_3 + m_2m_3 = Q$

(iii) $m_1m_2m_3 = -R$

El primer paso para resolver esta ecuación general será eliminar el segundo término de la ecuación (Pm^2) y reducir la ecuación a una de la forma:

$$x^3+qx+r=0;$$

Para esto se realizará un "cambio de variable" m a otra x, tal que al realizarlo convierta la suma de las "nuevas" tres raíces (el coeficiente que acompaña a x^2) en cero. Esto se hace incrementando a cada una de las raíces en $\frac{P}{3}$, y por lo tanto bastará con aplicar el cambio de variable

$$m = x - \frac{P}{3}.$$

- Resolver la ecuación $x^3+qx+r=0$.

Pongamos $x=y+z$; entonces

$$x^3 = y^3+z^3+3yz(y+z) = y^3+z^3+3yzx,$$

y la ecuación dada se convierte en

$$y^3+z^3+(3yz+q)x+r=0.$$

Esta ecuación queda satisfecha para los valores que cumplan las condiciones

$$y^3+z^3=-r$$
$$3yz=-q$$

o sea:

$$y^3+z^3=-r$$
$$y^3z^3=\frac{-q^3}{27}$$

Luego, y^3 z^3 son las raíces de la ecuación cuadrática (recuerde las propiedades de las raíces de las ecuaciones de segundo)

$$t^2+rt-\frac{q^3}{27}=0,$$

llamada *resolvente* de la ecuación dada. Resultan así los valores

$$y^3=-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}$$
$$z^3=-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}$$

El valor de x se obtiene de la relación $x=y+z$, luego,

$$x=\left[-\frac{r}{2}+\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}+\left[-\frac{r}{2}-\sqrt{\frac{r^2}{4}+\frac{q^3}{27}}\right]^{\frac{1}{3}}$$

La solución anterior se conoce generalmente como *fórmula de Cardano*, ya que fue publicada por primera vez por él en la obra *Ars Magna*, en 1545.

Referencia: Álgebra Superior, Hall y Knight.

Las otras dos soluciones que faltan se pueden encontrar dividiendo el polinomio cúbico por el factor (x-a) donde a es una raíz y resolviendo la ecuación de segundo grado que resulta.

P12) (P1, C2 2004, Prof. Raúl Manasevich)
a) Resuelva la ecuación diferencial

$$y'' + 4y = \sin^2 x.$$

b) Encuentre la forma de la solución particular para la ecuación

$$(D - I)^3 (D^2 - 4I)y = xe^x + e^{2x} + e^{-2x}.$$

P13) (P1, EX 2004, Prof. Raúl Manasevich)
Usando el método de coeficientes indeterminados resuelva la ecuación

$$y^{(v)} + 8a^3 y'' = a + e^{at}\cos(at).$$

P14) (P1, EX 2004, Prof. Raúl Manasevich)
Encontrando primero la base de soluciones resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

i) $sen^2(x)y'' - 3sen(x)\cos(x)y' + (1 + 2\cos^2(x))y = 3\cos(x)$

ii) $x^2 y'' + xy' - 4y = 4x^2$

<u>Método de Variación de Parámetros.</u>

P1) (P3 C2 1995, Prof R. Manasevich)

Considere la ecuación diferencial $t^2 y'' + ty' + \left(t^2 - \frac{1}{4}\right)y = t^{\frac{3}{2}}, t \succ 0$

a) Demuestre que $y_1(t) = t^{-\frac{1}{2}}\cos t$ es una solución de la ecuación homogénea correspondiente.
b) Encuentre otra solución l.i. con y_1.
c) Encuentre la solución general.

P2) (Tarea 2 2001, Prof R. Manasevich)
Usando el método de variación de parámetros resuelva las siguientes ecuaciones diferenciales:

a) $y'' - 3y' + 2y = \dfrac{e^{3x}}{1+e^x}$

b) $4y'' - 4y' + y = \dfrac{e^{\frac{x}{2}}}{\sqrt{1-x^2}}$ donde $x \in [-1,1]$

c) $y''' + 4y'' = \sec(2x)$ donde $x \in \left(-\pi/4, \pi/4\right)$

d) $y'' - 4y' + 4y = (12x^2 - 6x)e^{2x}$ con la condición inicial y(0)=1, y´(0)=0.

P3) (P1 C2 2001, Prof R. Manasevich)
(a) Considere la ecuación diferencial $y'' + p(t)y' + q(t)y = f(t)$ (1) donde p,q,f son funciones definidas en R continuas. Suponiendo que $y_1(t)$, $y_2(t)$ son dos soluciones l.i. de la ecuación homogénea asociada demuestre que la solución general de (1) se puede escribir en la forma

$$y(t)=C_1y_1(t)+C_2y_2(t)+\int_0^t G(t,s)f(s)ds,$$

donde se pide determinar esta función G.
(b) Evalúe a partir de (a) la solución general de la ecuación $y''+k^2y=f(t)$.

P4) (P2 Control 2 2001, Prof R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=0, x>0.$$

Encuentre una base de soluciones de esta ecuación.
Sugerencia. Considere funciones de la forma h(x)cos(Bx), y, o g(x)sen(Bx), para funciones h y g convenientes.

Encuentre la solución general de la ecuación

$$x^2y''+xy'+\left(x^2-\frac{1}{4}\right)y=x^{\frac{5}{2}}, x>0.$$

P5) (P5 Control 1 2002, Prof R. Manasevich)
Encuentre la solución general del problema

$$y'''+y'=\tan t,\quad t\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right).$$

P6) (P2 Control 2 2003, Prof R. Manasevich)
Considere la ecuación diferencial

$$xy''+\left(4x^2-1\right)y'+4x^3y=x^3e^{x-x^2}, x>0.$$

i) Encuentre la solución de la ecuación homogénea correspondiente.
Hint. Reduzca esta ecuación a una de coeficientes constantes mediante un cambio de la forma $t=x^\alpha$, para un cierto α.
ii) Encuentre la solución de la ecuación general por medio de variación de parámetros.

P7)
Encuentre la solución particular de la siguiente ecuación diferencial:

$$y''+a^2y=F(x)$$