PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2004

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIDAD N°3
TRANSFORMADA DE LAPLACE Y APLICACIONES

P1) (Tarea 6 2001, Prof. R. Manasevich)

i) Encuentre las transformadas inversas de Laplace en los siguientes casos:

a) $L^{-1}\left\{\frac{1}{s^2+s-20}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\frac{s-1}{s^2(s^2+1)}\right\}$

ii) Encuentre las siguientes transformadas de Laplace:

a) $L\{e^t\cos^2(3t)\}$ b) $L\{t^2\cos^2(t)\}$

P2) (P1 C3 2002, Prof. R. Manasevich)

Encuentre las siguientes transformadas de Laplace:

a) $L\{e^{2t}(t-1)^2\}$ b) $L\{e^tU(t-5)\}$ c) $L\{te^{-3t}\cos(3t)\}$

((ii) U es la función Escalón Unitario)

P3) (P2 C3, Prof. R. Manasevich)

Encuentre la transformada inversa de las siguientes funciones:

a) $L^{-1}\left\{\frac{(s+1)^2}{(s+2)^4}\right\}$ b) $L^{-1}\left\{\ln\left(\frac{s^2+1}{s^2+4}\right)\right\}$ c) $L^{-1}\left\{\frac{sF(s)}{s^2+4}\right\}$

((iii) suponga que $f(t)=L^{-1}(F(s))$.)

P4) (P3 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

Usando transformada de Laplace resuelva los siguientes problemas.

(i) Encuentre la solución de :

$$EI\frac{d^4y}{dx^4}=\omega_0\left[1-U(x-\frac{L}{2})\right]$$

que satisface $y(0)=y'(0)=0$, $y(L)=y''(L)=0$ .Aquí E, I, w_0 son constantes positivas y $L>0$

(ii) Encuentre la solución de :

$$y''-7y'+6y=e^t+\delta(t-10\pi)+\delta(t-20\pi),$$
$$y(0)=y'(0)=0$$

P5) (P4 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)
(i) Usando transformada de Laplace encuentre la solución de la ecuación integral:

$$y(t) = \cos t + \int_0^t e^{-s} y(t-s)ds$$

(ii) Sea $f : [0, \infty) \to R$ continua a trozos y de orden exponencial. Demuestre que su transformada de Laplace *F(s)* satisface $\lim_{s \to \infty} F(s) = 0$

(iii) Calcule la transformada de Laplace de la onda cuadrada

$$w(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 2n \leq t < 2n+1 \quad , n \in N \\ -1 & si \quad 2n+1 \leq t < 2n+2 \quad , n \in N \end{cases}$$

P6) (Ex 2000, Prof. R. Manasevich)

(ii) $$\frac{dx}{dt} = 4x - 2y + 2U(t-1)$$

$$\frac{dy}{dt} = 3x - y + U(t-1), \qquad x(0) = 0, y(0) = 1/2$$

P7)
Resuelva por medio de la transformada de Laplace el siguiente problema con condición inicial:

$$y'' + 4y' + 3y = 1 - U(t-2) - U(t-4) + U(t-6)$$
$$y(0) = 0, y'(0) = 0$$

P8) (Ex 2001, Prof. R. Manasevich)
Considere la función f(t) definida en los reales positivos incluyendo el cero definida por:

$$f(t) = n \quad \text{si} \quad n-1 \prec t \leq n \qquad n \in N$$ (función cajón o parte entera)

i) Encuentre una expresión para esta función como una serie infinita y encuentre entonces su transformada de Laplace. Si es necesario suponga que la transformada de la serie es igual a la serie de las transformadas.

ii) Use transformada de Laplace para resolver el problema con condición inicial siguiente:

$$x'' + k^2 x = f(t), \qquad x(0) = 0, x'(0) = 0$$

donde f(t) es la función de la parte (i). Encuentre la solución en forma explícita.
Sugerencia: Use convenientemente el teorema de convolución.

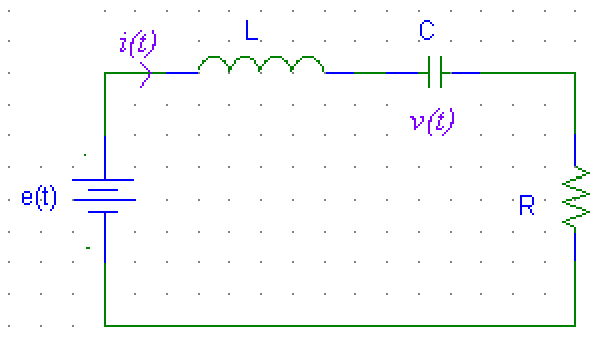
P9) (P3C2 2003, Prof. R. Manasevich)
(i) Dibuje la función e(t) dada por:

$$e(t) = t - j, \text{ para } j \le t < j+1, \ j \in \{0\} \cup N$$

Demuestre que su transformada de Laplace es dada por:

$$\frac{1}{s}\left(\frac{1}{s} + \frac{e^{-s}}{e^{-s} - 1}\right).$$

(ii) Considere ahora el circuito eléctrico RLC en serie



El voltaje *v(t)* en el condensador C satisface la ecuación diferencial

$$C\frac{d^2v}{dt^2} + \frac{RC}{L}\frac{dv}{dt} + \frac{1}{L}v = \frac{e(t)}{L}.$$

Calcule el voltaje *v(t)* por el condensador y la corriente $i(t) = C\frac{dv}{dt}(t)$, si la entrada de voltaje e(t) esta dado por la función de la parte (i), y las condiciones iniciales son $v(0) = v_0, i(0) = i_0$.
Las constantes quedan dadas por LC=1, RC=2.

P10) (P5C2 2003, Prof. R. Manasevich)
(i) Considere el problema con valores iniciales

$$x'' + 2x' + x = \sum_{n=0}^{\infty} \delta_{n\pi}(t), x(0) = x'(0) = 0.$$

Determine la solución usando transformada de Laplace.
Para esto suponga que la transformada de la serie es la serie de las transformadas y similarmente para la transformada inversa.
(ii) Si $t \in [j\pi, (j+1)\pi[$ demuestre que $x(t) = e^{-t}(t \cdot \alpha_j + \beta_j)$, para ciertas constantes α_j y β_j.

P11) (P2 Ex 2003, Prof. R. Manasevich)

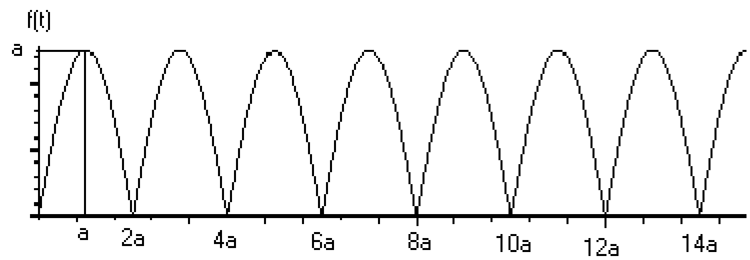
i) Resuelva la ecuación:

$$x' = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} x + \begin{pmatrix} U(t-a) \\ \delta(t-b) \end{pmatrix} \quad a, b \in \Re^{+} \;;$$
$$x(0) = 0$$

ii) Encuentre la transformada de Laplace de la onda periódica de la figura, que en su primer período cumple con:

$$f(t) = A \cdot sen(wt), \;\; t \in (0, 2a)$$

con A y w valores adecuados.



iii) Resuelva la ecuación:

$$y'' + 2y' + y = f(t)$$

donde $f(t)$ es la función de la parte ii)