PROFESOR: Raúl Manasevich
AUXILIAR: Alfredo Núñez
Ecuaciones Diferenciales Ordinarias
Semestre Otoño 2004

UNIVERSIDAD DE CHILE
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

UNIDAD N°4
SISTEMAS LINEALES DE ECUACIONES

P1) **(P3 Examen 2000, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva: $$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \vec{X}$$

P2) **(P2 Examen 2001, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva: $$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 6 & -12 & -1 & -6 \\ 0 & -4 & 0 & -1 \end{bmatrix} \vec{X}$$

P3) **(P3 y P4 Control 3 2000, Prof. R. Manasevich)**

Resuelva:

i) $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$ **;** **ii)** $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 0 & 6 & 0 \\ -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$

P4) **(P1 Control 3 2001, Prof. R. Manasevich)**

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -2 & 2 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 & -3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

a) Encuentre base de soluciones. Exprese la solución general del problema en sus componentes.

b) Encuentre la solución de (a) que satisface la condición inicial $\vec{X}(0) = (0,0,v_0,v_0)^t$.

P5) (P2 C3 2001, Prof. R. Manasevich)

$$\vec{X}' = \begin{bmatrix} 3 & -4 & 1 & 0 \\ 4 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & -4 \\ 0 & 0 & 4 & 3 \end{bmatrix} \vec{X}$$

Encuentre base de soluciones y exprese la solución general en sus componentes.

P6)

i)Resuelva: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ b & a & d & c \\ c & d & a & b \\ d & c & b & a \end{bmatrix} \vec{X}$ **;** a,b,c,d constantes reales.

y luego resuelva: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a \end{bmatrix} \vec{X}$; a cte.

ii) Resuelva: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a^2 & ab & ac & ad \\ ab & b^2 & bc & bd \\ ac & bc & c^2 & cd \\ ad & bd & cd & d^2 \end{bmatrix} \vec{X}$

P7) (Tarea #5(i) 2001, Prof. R. Manasevich)

Resuelva: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 8 & 0 & 0 \\ 15 & -10 & 8 & 0 \\ 0 & 4 & -5 & 8 \end{bmatrix} \vec{X}.$

P8) (Tarea #6(i)(ii) 2001, Prof. R. Manasevich)

Resuelva: **i)** $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 3 & 0 & 6 \\ -4 & 0 & -3 \end{bmatrix} \vec{X}$ **;** **ii)** $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 6 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & -4 & 0 & 4 \end{bmatrix} \vec{X}$

P9) (Guía Control 3, Prof. R. Manasevich)

i) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \vec{X}$ **;**

ii) Resuelva el sgte. Sistema de ecuaciones no homogéneo: $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 1 & 8 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \vec{X} + \begin{bmatrix} e^t \\ te^t \end{bmatrix}$

iii) a) Escriba la ecuación diferencial (1) como un sistema de ecuaciones de primer orden y resuelva

$$y^{(4)} - 5y^{(2)} + 9y = 6e^t - 2t; \qquad (1)$$

Sugerencia: Separe en homogénea y particular.

P10) (P5 Examen 2002, Prof. R. Manasevich)

(i) Resuelva el siguiente sistema de ecuaciones:

$$x' = Ax, \qquad A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ c & a & d \\ 0 & -\dfrac{bc}{d} & a \end{pmatrix}$$ donde a ,b ,c y $d \neq 0$ son constantes

(ii) Considere el sistema de ecuaciones $x' = A(t)x$, donde $A : I \to M^{nxn}$ es continua en el intervalo I. Sea $\phi(t)$ una matriz (cada t) formada por columnas que son soluciones de la ecuación diferencial. Demuestre que para cualquiera $t, t_0 \in I$ la siguiente formula es verdadera:

$$|\phi(t)| = |\phi(t_0)| e^{\int_{t_0}^{t} trA(s)ds}$$

donde $|\phi(t)|$ denote el determinante de la matriz $\phi(t)$. Suponga que las soluciones que forman $\phi(t)$ son linealmente independientes.

P11) (P3 Control 3 2001, Profesor Raúl Manasevich)

Considere los sistemas de la forma $x' = Ax$, donde

$$\text{i) } A = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}, \qquad \text{ii) } A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$$

a) En ambos casos determine una base de soluciones y la solución general escrita en sus componentes.

b) Para ambos casos dibuje, justificando matemáticamente sus resultados, las soluciones del sistema canónico correspondiente para $t \geq 0$. Note que en el segundo caso la ecuación está en la forma canónica.

P12) (P1 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)

a) Usando el Método de Variación de Parámetros resuelva:

$$X' = \begin{pmatrix} ab & -2a^2 \\ b^2 & -ab \end{pmatrix} X + f(t)$$

para los casos: (i) $f(t) = \begin{pmatrix} 2a \\ b \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} a^2b^2 \\ -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}$, ii) $f(t) = \begin{pmatrix} 2at \\ bt \end{pmatrix}, X(0) = \begin{pmatrix} \dfrac{2}{ab^2} \\ \dfrac{1}{a^2b} - 1 \end{pmatrix}$

P13) (P2 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)

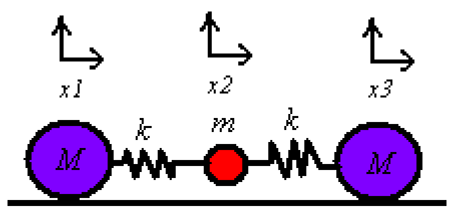
Considere el problema $x' = Ax,$ donde $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 2\omega & 0 & 0 \\ -a\omega & a & \omega & 0 \\ -b\omega & b & 0 & \omega \end{bmatrix}$

Encuentre una base de soluciones y de ahí la solución general del problema.

P14) (P3 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)

Considere el movimiento longitudinal del sistema de 3 masas (M-m-M) y 2 resortes de constante k que unen las masas M con la masa central m. Las ecuaciones de movimiento para cada masa son:

$$Mx_1'' + k(x_1 - x_2) = 0$$
$$mx_2'' + k(x_2 - x_1) + k(x_2 - x_3) = 0$$
$$Mx_3'' + k(x_3 - x_2) = 0$$



Encuentre las frecuencias y modos normales de oscilación del sistema. Explique sus resultados.

P15) (P4 Control 3 2002, Profesor Raúl Manasevich)

Considere los sistemas de la forma $x' = Ax,$ donde

i) $A = \begin{bmatrix} a^2b^2 & -b^2 \\ a^2 & a^2b^2 \end{bmatrix},$ ii) $A = \begin{bmatrix} 0 & \omega \\ -\omega & 0 \end{bmatrix}$

a) En ambos casos determine una base de soluciones y la solución general.
b) Para ambos casos dibuje, justificando matemáticamente sus resultados, los diagramas de fases correspondientes para $t \geq 0.$ En la parte (i) haga a=b.

P16) (P5 Control 3 2002, Prof. R. Manasevich)

Considere los problemas $x' = Ax,$ donde

i) $\vec{X}' = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & a & c \\ c & b & a \end{bmatrix}\vec{X}$ **;** **ii)** $\vec{X}' = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}\vec{X}$

Encuentre una base de soluciones y de ahi la solución general de cada problema.
Indicación: En la parte (i) haga $a - \lambda = \mu$, y note que en la ecuación característica se cumple que $\mu = c$.

P17) (P1 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)

Considere el problema: $$x' = \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 8 & -12 \end{pmatrix} x$$

a) Encuentre la solución $x(t) = (x_1(t), x_2(t))$.
b)Transforme el sistema a la forma canónica (y_1, y_2). Resuélvalo en estas coordenadas. En el plano y_1,y_2 encuentre los lugares geométricos que describen las soluciones (independientes de t) e indique mediante flechas como se mueven las soluciones cuando t crece (diagrama de fase).

P18) (P2 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación: $x' = Ax + e^{\mu t} b$,donde b es un vector de R^n y A matriz de R^{nxn}. Si imponemos que μ no es un valor propio de A, encuentre una solución particular para esta ecuación.

P19) (P3 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)

Considere el problema con condición inicial
$$x'' = A(t)x$$
$$x(t_0) = a, x'(t_0) = b.$$
donde a, b vectores de R^n conocidos y A(t) matriz de R^{nxn} para cada t en el intervalo I. I intervalo, A es continua en I. Demuestre que este problema tiene solución única en I.

P20) (P4 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)

Considere la ecuación $x'' + Ax = 0$ donde A es una matriz constante real de nxn. Supongamos también que A es simétrica y definida positiva. Encuentre la solución general de este problema.

P21) (P5 Control 2 2000, Prof. R. Manasevich)

Sea A una matriz real constante de nxn tal que tiene n valores propios reales y distintos. Encuentre la solución general de la ecuación
$$tx' = Ax, t \geq 0$$
Indicación: Considere primero el caso n=1 y luego genere un intento razonable para el caso general.

P22) (P1 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Considere el problema con condición inicial
$$x' = Ax, \quad x(0) = x_0,$$
donde A es una matriz de n por n de números reales. Vimos en clases que la solución de este problema es $x(t) = e^{tA}x_0$, donde e^{tA} es la matriz exponencial de A. Recuerde que $e^{0A} = I$, donde I es la matriz identidad de n por n.

(i) Demuestre que la matriz exponencial satisface la siguiente propiedad de semigrupo:

$$e^{(t+s)A} = e^{tA}e^{sA}, \text{ para todo t, s reales.}$$

Demuestre de aquí que $\left(e^{tA}\right)^{-1} = e^{-tA}$.

(ii) Sean A, B dos matrices reales n por n. Demuestre que:

$$e^{tA}B = Be^{tA}, \text{ para todo t real si y solo si AB=BA.}$$

(iii) Demuestre que

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}, \text{ para todo t real si y solo si AB=BA.}$$

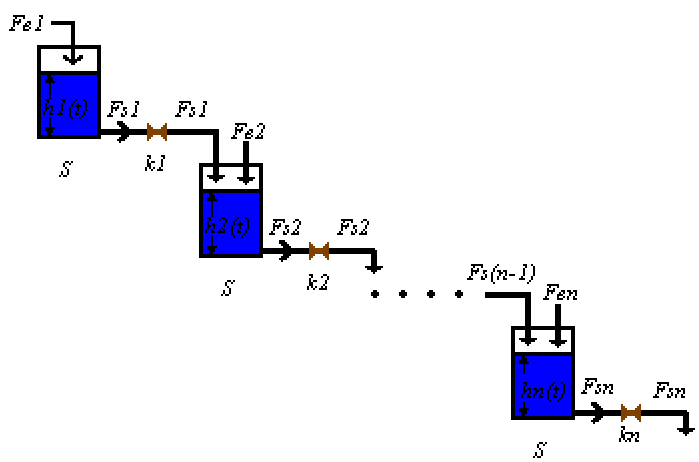
P23) (P2 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Encuentre la matriz exponencial y la solución general del sistema

$$x' = Ax, \quad x(0) = c, \text{ donde } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

P24) (P3 Control 2 2003, Prof. Raúl Manasevich)

Considere un sistema con N estanques conectados, por los cuales entra y sale un líquido (ver figura). Los estanques tienen sección transversal constante igual a S.
Suponiendo que el líquido tiene densidad constante, que los flujos de salida F_{Si} son proporcionales a las variaciones de presión en ambos lados de las llaves, que todas las llaves son distintas, y que los flujos de entrada F_{Ei} son constantes, se pide:
(i) Encontrar el sistema vectorial $h' = Ah + f$ que modela las alturas de cada estanque.
(ii) Resolver el sistema encontrado.



P25) (P3 Exámen 2003, Prof. R. Manasevich)

Resuelva el sistema de ecuaciones:

$$x' = \begin{pmatrix} a & b & 1 \\ -b & a & 0 \\ 1 & 0 & a \end{pmatrix} x \qquad a, b \in \Re$$

encontrando la matriz exponencial, en todos los casos posibles.