Universidad de Chile. Prof.: Felipe Alvarez.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 4 de junio de 2005 Tiempo: 3:30 hrs.

# CONTROL 2: MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2005

**Problema 1.**

(a) (2.0 pts.) Encuentre la antitransformada de Laplace de:

(a.1) $\dfrac{1}{s^2(s+1)}$.

(a.2) $\dfrac{3e^{-2s}}{3s^2+1}$.

(b) (2.0 pts.) Use transformada de Laplace para resolver la ecuación integro-diferencial

$$y' + 2y + \int_0^t y(\tau)d\tau = \begin{cases} t, & 0 \leq t < 1, \\ 2-t, & 1 \leq t < 2, \\ 0, & 2 \leq t \end{cases}$$

sujeta a la condición inicial $y(0) = 1$.

(c) (2.0 pts.) Resuelva el problema con condición inicial

$$\ddot{y} + 2\dot{y} + 2y = \delta(t-\pi), \quad y(0) = \dot{y}(0) = 0.$$

**Problema 2.**

(a) (2.0 pts.) Encuentre la matriz exponencial $e^{tA}$ donde

$$A = \begin{pmatrix} -1/2 & -3 & 0 & 0 \\ 3 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 3 & 7 \end{pmatrix}$$

(b) (2.0 pts.) Considere la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Determine la solución general del sistema $\dot{\vec{x}} = A\vec{x}$.

(c) (2.0 pts.) Encuentre la solución general del sistema

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}' = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

**Problema 3.**

Sea $A(t)$ una función matricial continua de a valores en $\mathbb{R}^{n\times n}$. Para cada $t, t_0 \in \mathbb{R}$ se define la matriz $W(t, t_0)$ como la única solución definida en $\mathbb{R}$ de

$$\begin{aligned} \frac{dW}{dt}(t) &= A(t)W(t) \\ W(t_0) &= I \end{aligned}$$

donde $I$ denota la matriz identidad.

(a) Demuestre que $x(t) = W(t, t_0)x_0$ es la solución de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A(t)x(t) \\ x(t_0) &= x_0 \end{aligned}$$

(b) Sean $t, r, s \in \mathbb{R}$, muestre que

$$W(t, s) = W(t, r)W(r, s).$$

En lo que sigue, suponga que $\exists T \in \mathbb{R}$ tal que $A(t + T) = A(t)$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(c) Muestre que $W(t + T, a + T) = W(t, a)$.

(d) Encuentre una matriz $P$ tal que $W(a+T, a) = PW(b+T, b)P^{-1}$ y deduzca que $W(a+T, a)$ y $W(b + T, b)$ tienen los mismos valores propios.

(e) Sea $v$ un vector propio asociado a un valor propio $\lambda$ de $W(a + T, a)$. Demuestre que $x(t) = W(t, a)v$ es solución de

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt}(t) &= A(t)x(t) \\ x(a) &= v \end{aligned}$$

y satisface que $x(a + kT) = \lambda^k v$ para todo $k \in \mathbb{N}$