Universidad de Chile. Prof.: Felipe Alvarez.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 22 de junio de 2005 Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3: MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias 2005

Problema 1. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}$, considere el sistema no-lineal

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= \varepsilon x + y - x(x^2+y^2)\\ \frac{dy}{dt} &= -x + \varepsilon y - y(x^2+y^2)\end{aligned}$$

Verifique que (0,0) es el único pto. crítico de este sistema. Cuando sea posible, analice su estabilidad mediante linealización, distinguiendo los casos $\varepsilon < 0$, $\varepsilon = 0$ y $\varepsilon > 0$. Usando transformadas polares, resuelva el sistema y bosqueje su diagrama de fase en cada caso.

Problema 2. Considere el siguiente sistema no lineal:

$$\begin{aligned}\frac{dx}{dt} &= -2x + x^2 - xy,\\ \frac{dy}{dt} &= -4y + y^2 + xy.\end{aligned}$$

Determine las isoclinas y encuentre los puntos críticos, describiendo cualitativamente el comportamiento de las soluciones en torno a cada uno de ellos. Bosqueje el diagrama de fase.

Problema 3.

(a) Considere el sistema no lineal

$$\frac{dx}{dt} = y + x(1-\sqrt{x^2+y^2}), \quad (1)$$

$$\frac{dy}{dt} = -x + y(1-\sqrt{x^2+y^2}). \quad (2)$$

(i) (1.5 pts.) Pruebe que el cambio a coordenadas polares $x = r\cos\theta$, $y = r\operatorname{sen}\theta$, permite escribir el sistema (1)-(2) de forma equivalente como:

$$\begin{aligned}\frac{dr}{dt} &= r(1-r),\\ \frac{d\theta}{dt} &= -1.\end{aligned}$$

Demuestre que el sistema (1)-(2) admite una única solución periódica no trivial $(x(t), y(t))$ y encuéntrela explícitamente.

(ii) (1.5 pts.) Pruebe que si $r(0) > 0$ entonces $r(t) \to 1$ cuando $t \to \infty$. Bosqueje el diagrama de fase del sistema (1)-(2).

(b) Considere el sistema

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad (3)$$

$$\frac{dy}{dt} = 8x - 2x^3. \quad (4)$$

(i) (1.0 pto.) Encuentre una función escalar $H = H(x,y)$ que permita escribir (3)-(4) como un sistema de tipo Hamiltoniano.

(ii) (2.0 pts.) Determine los puntos críticos de (3)-(4), y analice cuidadosamente su estabilidad. Proporcione un bosquejo del diagrama de fase para este sistema.