Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 11 de Julio de 2005.

Prof.: Felipe Alvarez.

EXAMEN

MA26A Ecuaciones Diferenciales Ordinarias

Problema 1. [40%]

(i) (2.0 pts.) Muestre que la sustitución $v = \ln y$ transforma la ecuación diferencial $y' + P(x)y = Q(x)(y \ln y)$ en la ecuación diferencial lineal $v' + P(x) = Q(x)v$. Utilice esto para resolver $xy' - 4x^2y + 2y\ln y = 0$.

(ii) (2.0 pts.) Demuestre que las funciones $y_1(x) = x$, $y_2(x) = x\ln x$ e $y_3(x) = x^2$ son soluciones l.i. de la ecuación $x^3y''' - x^2y'' + 2xy' - 2y = 0$, $x > 0$, y encuentre la solución particular que satisface $y(1) = 0$, $y'(1) = 1$ e $y''(1) = 0$.

(iii) (2.0 pts.) Encuentre la solución general de $y''' + 9y' = x\,\mathrm{sen}x + x^2e^{3x}$.

Problema 2. [30%] Considere el sistema no lineal

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= -1 + e^y + \frac{1}{2}xe^{xy}, \\ \frac{dy}{dt} &= 1 - e^x - \frac{1}{2}ye^{xy}. \end{aligned}$$

(i) (2.0 pts.) Verifique que el origen es un punto crítico del sistema no lineal, encuentre el sistema linealizado en torno a $(0,0)$ y bosqueje el diagrama de fase de este último en el plano de las perturbaciones. Usando sólo esta información, ¿qué puede concluir sobre la estabilidad del origen para el sistema original?

(ii) (4.0 pts.) Pruebe que el sistema no lineal es de tipo Hamiltoniano y encuentre una función Hamiltoniana $H = H(x,y)$ de modo tal que las soluciones satisfagan $H(x(t), y(t)) \equiv \textit{constante}$. Demuestre que el origen es un punto crítico estable, pero no asintóticamente estable.

Problema 3. [30%]

(i) (4.0 pts.) Para el siguiente sistema no lineal, determine las isoclinas y encuentre los puntos críticos, describiendo cualitativamente el comportamiento de las soluciones en torno a cada uno de ellos. Bosqueje además el diagrama de fase global.

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &= 14x - \frac{1}{2}x^2 - xy \\ \frac{dy}{dt} &= 16y - \frac{1}{2}y^2 - xy \end{aligned}$$

(ii) (2.0 pts.) Encuentre la solución del problema diferencial

$$y'' + 2y' + 2y = f(t),\ t > 0$$

con condiciones iniciales $y(0) = y'(0) = 0$, y donde $f(t) = 1$ si $0 < t \le 1$ y $f(t) = 0$ si $t > 1$.

Tiempo: 3:30 hrs.