Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 12 de Septiembre de 2002.

Prof.: Felipe Alvarez
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 1: MA26B-01 Matemáticas Aplicadas 2002

Problema 1. Sea $\vec{\sigma} : [a, b] \to \mathbb{R}^3$ la parametrización de una curva regular $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$. Denotemos por $T(t)$, $N(t)$ y $B(t)$ los vectores tangente, normal y binormal respectivamente. Sea $\kappa(t)$ la curvatura y $\tau(t)$ la torsión.

(a) (3.0 ptos.) Suponga que la curva es plana y que $\kappa(t) \neq 0$ para todo t. La *evoluta* de Γ se define como la curva parametrizada por $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + 1/\kappa(t)N(t)$.
(i) Suponga que $\kappa'(t) \neq 0$. Pruebe que la evoluta es una curva regular y que el vector tangente a la evoluta en t es paralelo a $N(t)$. Ind.: puede suponer que Γ está parametrizado en longitud de arco.
(ii) Considere $\vec{\sigma}(t) = (0, \cosh(t), t)$ con $t \in [-1, 1]$, determine su curvatura y una parametrización de su evoluta. Haga un bosquejo donde represente Γ y su evoluta indicando claramente los ejes y los vectores normal y tangente respectivamente.

(b) (3.0 ptos.) Suponga que $\kappa(t) \neq 0$ y $\tau(t) \neq 0$ para todo t. Se dice que Γ es una *curva de Bertrand* si existe otra curva regular, llamada *par de Bertrand de* Γ, parametrizada según t y tal que para cada valor de t las rectas normales a ambas curvas son iguales.
(i) Pruebe que si Γ es una curva de Bertrand entonces existe una función $\alpha : [a, b] \to \mathbb{R}$ tal que la parametrización de su par de Bertrand satisface $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + \alpha(t)N(t)$. Más aún, muestre que necesariamente α es constante, i.e. $\alpha(t) \equiv \alpha_0$ para algún $\alpha_0 \in \mathbb{R}$.
(ii) Pruebe que si existen dos constantes no nulas A y B tales que $A\kappa(t) + B\tau(t) = 1$ para todo t, entonces Γ es una curva de Bertrand. Indicación: considere $\vec{r}(t) = \vec{\sigma}(t) + AN(t)$.
(iii) Usando (ii), verifique que dados $a > 0$ y $b > 0$ la hélice $\vec{\sigma}(t) = (a\cos(2\pi t), a(2\pi t), bt)$, $t \in [0, 1]$, es una curva de Bertrand y caracterice sus pares de Bertrand.

Problema 2.

(a) (2.0 ptos.) Consideremos un sistema de coordenadas curvilíneas $\vec{r} : D \to \mathbb{R}^3$ de la forma

$$\vec{r}(u, v, w) = (R(v) + uw)\cos v\hat{\imath} + (R(v) + uw)v\hat{\jmath} + u\cos w\hat{k},$$

donde $R : [0, 2\pi] \to (0, +\infty)$ una función diferenciable y $D = \{(u, v, w) \in \mathbb{R}^3 \mid 0 < u < R(v),\ v \in [0, 2\pi],\ w \in [0, 2\pi]\}$. Encuentre una condición necesaria y suficiente para que $\vec{r}(u, v, w)$ defina un sistema de coordenadas ortogonal.

(b) (2.0 ptos.) Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función de clase C^1 tal que $f'(v) \neq 0$ para todo $v \in \mathbb{R}$. Considere la superficie parametrizada por $\vec{r}(u, v) = u\hat{\imath} + f(v)\hat{\jmath} + f(v)^2\hat{k}$. Determine la ecuación del plano tangente a la superficie en el punto $\vec{r}(u_0, v_0)$. Pruebe que este plano contiene al eje OX si y sólo si $f(v_0) = 0$.

(c) (2.0 ptos.) Calcule el gradiente de $f(x, y, z) = \frac{\arccos\left(z/\sqrt{x^2+y^2+z^2}\right)}{x^2+y^2+z^2}$.

Problema 3. Sea $S \subset \mathbb{R}^3$ la superficie regular definida por las ecuaciones $x^2 + y^2 - z^2 = 0$, $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$ $(a > 0)$, $x \geq 0$ y $z \geq 0$

(a) (2.0 ptos.) Bosqueje S, parametrícela y calcule su área.

(b) (2.0 ptos.) Escoja una orientación para S y calcule el flujo a través de S del campo vectorial en coordenas cilíndricas: $\vec{F} = \rho\hat{\rho} + \cos^2\theta e^{\cos^3\theta}\hat{\theta}$.

(c) (2.0 ptos.) Calcule el trabajo del campo $\vec{F}$ de la parte (b) al recorrer la curva que se obtiene como intersección de las superficies $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ y $x^2 + y^2 - 2ay = 0$. Haga un bosquejo de esta curva y precise el sentido de recorrido.