

Prof. FELIPE ALVAREZ DAZIANO

Matemáticas Aplicadas
CONTROL 1 - Abril 1999

Tiempo: 3hrs.

[30%] **P1.-** Algo más sobre curvas planas.

(i) Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana Γ de longitud l_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$.

Ind.: Defina $\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau$, $x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau$, $y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$ y estudie $\vec{r}'(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$.

(ii) Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$. Determine una fórmula para la longitud de Γ . Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

[35%] **P2.-** ¿ Conservativo o no conservativo ? Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define $n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}$.

(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.

(i) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), -r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.

(iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

Pregunta: ¿ Es \vec{F} un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Dada Γ curva cerrada en torno al origen $(0, 0)$, se le llama a $n(\Gamma)$ el *número de enrollamiento anti-horario* de Γ . Justifique esta terminología.

(b) Considere la curva Γ parametrizada por $\vec{r}(t) = (2r - r \cos(t), r \sin(t))$, $t \in [0, 2\pi]$. Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ . Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.

Ind.: Busque g de la forma $g(x, y) = f(\frac{y}{x})$ (recuerde que $\frac{d}{dt}(\arctg)(t) = \frac{1}{1+t^2}$). (c)
 ¿ Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b) ? Justifique.

[35%] **P3.-**

(A) *Cuadratura de una superficie curva.* Al calcular el área de una superficie curva normalmente aparecen números irracionales, como π . El siguiente ejemplo muestra que no siempre ésto es así.

(i) Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (explote la simetría y use coordenadas cilíndricas).

(ii) Deduzca que el valor del área de la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$ que no está incluida dentro del cilindro es un cuadrado perfecto.

(B) *Superficie de revolución.* Consideremos el sistema de coordenadas dado por

$$\vec{r}(x, \rho, \theta) = (x, \rho \cos \theta, \rho \sin \theta),$$

con $x \in \mathbb{R}$, $\theta \in [0, 2\pi[$ y $\rho \geq 0$.

(i) Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. ¿Son ortogonales ? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.

(ii) Dada una función no-negativa y diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}_+$, bosqueje la superficie de ecuación $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es $\vec{r}_1(x, \theta) = x\hat{x} + f(x)\hat{\rho}$.

(iii) Expresar el área de la superficie definida en (ii) como una intergral en términos de f y f' .