MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2005-1

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Control 1

P1. (a) (4 pts.) Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$, no reducida a un solo punto, con la siguiente propiedad:

(P) Existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ,

donde la recta normal a Γ, en un punto $\vec{r}_0 \in \Gamma$ dado, es la recta definida por el punto $\vec{r}_0$ y el vector normal a la curva en este punto.

Note que, por ejemplo, todo arco de circunferencia satisface la propiedad (P).

Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

(i) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

(ii) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

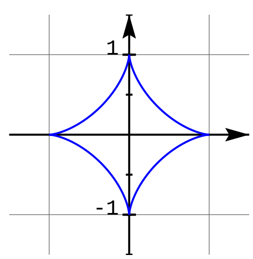
$$\begin{aligned} 1 - \kappa(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\kappa(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ, respectivamente.

(iii) Concluya que Γ es una curva plana.

(iv) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

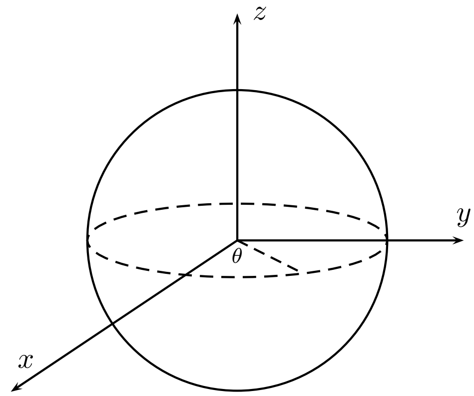
(b) (2 pts.) Considere la parametrización $\vec{r} : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3$ definida por $\vec{r}(t) = (\cos^3 t, \operatorname{sen}^3 t, 0)$. La curva $\vec{r}([0, 2\pi])$ recibe el nombre de astroide.



(i) (1.5 pts.) Calcule el vector tangente, normal y binormal, la curvatura y la torsion a la curva en los puntos donde tenga sentido. Justifique brevemente en cuales puntos estas nociones están bien definidas.

(ii) (0.5 pts.) Calcule además la parametrización en longitud de arco y el largo total de la curva.

P2. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria Γ definida sobre el casquete de una esfera unitaria, de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = e^{-\theta}$, donde $\theta \geq 0$.



Considere el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(\frac{2x}{x^2+y^2+z^2} + x\,\mathrm{sen}(x^2), \frac{-2y}{x^2+y^2+z^2} - y^2\cos(y^3), e^z\Big).$$

(a) Demostrar que el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ a través de Γ es acotado superiormente por 3. ¿Puede dar una cota más fina?.

(b) Demuestre que el trabajo realizado es acotado inferiormente por $-1/3 - e^{-1}$.

Indicación: En el desarrollo de esta pregunta deberá acotar expresiones que dependen de las funciones seno y coseno, así como ciertas integrales del tipo $\int_0^{+\infty} \mathrm{sen}\, u\, du$ cuyo valor es indefinido. Esto se logra de manera directa usando propiedades de acotamiento de las funciones seno y coseno.

P3. (a) Dado $\vec{F}: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial conservativo de clase $\mathcal{C}^1$, demuestre que

$$\iint_{\Sigma} \vec{F}\cdot\hat{n}\, dA = \iiint_{\Omega} \Delta\phi\, dV,$$

para cierta función escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. Hemos denotado aquí por Σ a una superficie regular que encierra al volúmen Ω, la cual está orientada según la normal exterior $\hat{n}$. Además, el operador *laplaciano* para una función escalar $\phi: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$ se ha definido como

$$\Delta\phi = \frac{\partial^2\phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\phi}{\partial z^2}.$$

(b) Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y, z) = (2x + 2, 4y - 4, 2z)$. Calcular el flujo de $\vec{F}$ a través del hemisferio superior del casquete elipsoidal

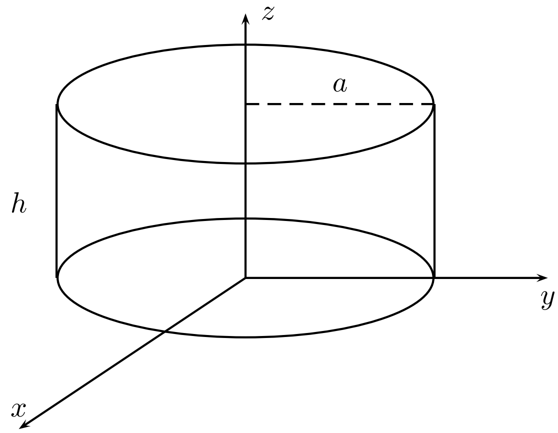
$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

orientado según la normal *interior*.

(c) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(x, y, z) = (e^z \operatorname{sen} y + xy^2 z, e^x \cos z + x^2 yz, x^2 e^z)$$

a través del manto del cilindro de la figura, orientado según la normal exterior.



Tiempo: 3 horas.

Sin consultas.