UNIVERSIDAD DE CHILE
Facultad de Ciencias Físicas
y Matemáticas

Semestre Primavera 2002.
Matemáticas Aplicadas
MA26B-02

Profesores: Rafael Correa - Pedro Gajardo.
Auxiliar: Claudio Contardo.

Control #1

PREGUNTA 1

Sea $\vec{v}$ un campo definido por

$$\vec{v}(x,y,z) = z\hat{\imath} + x\hat{\jmath} + y\hat{k}.$$

Considere las siguientes regiones del espacio

$$\begin{aligned} H_1 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ z = 0, \quad y \geq 0\} \\ H_2 &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ y = 2z\} \\ D &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ : \ x^2 + y^2 = a^2\} \end{aligned}$$

i) (2 ptos.) Dibuje la curva $\mathfrak{C} = (H_1 \bigcup H_2) \bigcap D$ y la superficie S que ella define.

ii) (2 ptos.) Calcule directamente

$$\int_S rot\vec{v} \cdot \hat{n} \; d\sigma$$

iii) (2 ptos.) Verifique el resultado anterior mediante el Teorema de Stokes.

PREGUNTA 2

Sean T y Ω dos volúmenes acotados, simplemente conexos, tales que $T \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$. Sea S la superficie suave por pedazos que define a T. Se considera el siguiente problema:

Encontrar $u \in C^2(\Omega; \mathbb{R})$ tal que

$$(P) \left\{ \begin{array}{ll} \nabla^2 u = f & \text{en } T \\ \nabla u \cdot \hat{n} = g & \text{sobre } S \end{array} \right.$$

donde f y g pertenecen a $C(\Omega; \mathbb{R})$.

i) (2.5 ptos.) Demuestre que una solución u de (P) satisface

$$\int_T \nabla u \cdot \nabla v d\tau = \int_S vg d\sigma - \int_T vf d\tau$$

para todo $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$.
(**Ind:** Utilice el Teorema de la Divergencia para la función $v\nabla u$ donde u es una solución de (P) y $v \in C^1(\Omega; \mathbb{R})$).

ii) (2.5 ptos.) Considere ahora el siguiente problema:

Encontrar $\tilde{u} \in C^2(\Omega; I\!R)$ tal que

$$(\tilde{P}) \begin{cases} \nabla^2 \tilde{u} = \tilde{f} & \text{en } T \\ \nabla \tilde{u} \cdot \hat{n} = \tilde{g} & \text{sobre } S \end{cases}$$

donde $\tilde{f}$ y $\tilde{g}$ pertenecen a $C(\Omega; I\!R)$. Muestre que si u es una solución de (P) y $\tilde{u}$ es una solución de $(\tilde{P})$, entonces

$$\int_S (\tilde{u}g - u\tilde{g}) d\sigma = \int_T (\tilde{u}f - u\tilde{f}) d\tau$$

(**Ind:** Utilizar parte anterior).

iii) (1 pto.) Muestre que una solución u del problema

$$(P) \begin{cases} \nabla^2 u = \frac{1}{x} & \text{en } T \\ \nabla u \cdot \hat{n} = 0 & \text{sobre } S \end{cases}$$

satisface

$$\int_T \frac{\partial u}{\partial x} d\tau = -V(T)$$

donde en este caso T es un volumen que no intersecta el plano $y-z$ y $V(T)$ es su volumen.

PREGUNTA 3

a) (3 ptos.)Considere la región del plano $R = [0, \pi]^2 \subset I\!R^2$. Se define para $n > 2$ las siguientes funciones

$$\begin{aligned} M_n(x, y) &= xy^{n-1} \cos^n(y) + \ln(1 + x^n) \\ N_n(x, y) &= yx^{n-1} \sin^n(x) + ye^{y^n} \end{aligned}$$

i) (2.5 ptos.) Calcule $I_n = \int\limits_{\partial R} M_n(x, y)dx + N_n(x, y)dy$.

ii) (0.5 pto.) Calcule $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n}$ y $\lim\limits_{n\to\infty} I_{2n+1}$

b) (3 ptos.) Considere el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{\imath} + \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}\hat{\jmath} + z\hat{k}$$

y las curvas con sus respectivas parametrizaciones

$$\begin{aligned} \mathfrak{C}_1 : \vec{\Gamma}_1(t) &= (a\cos(t), a\sin(t), 0) \qquad t \in [\pi, 2\pi] \\ \mathfrak{C}_2 : \vec{\Gamma}_2(t) &= (1 - t)(a, 0, 0) + t(a, 0, a) \qquad t \in [0, 1] \\ \mathfrak{C}_3 : \vec{\Gamma}_3(t) &= (a\cos(t), a\sin(t), a) \qquad t \in [0, \pi] \end{aligned}$$

Calcular $\int\limits_{\mathfrak{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ donde $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_1 \bigcup \mathfrak{C}_2 \bigcup \mathfrak{C}_3$.

Tiempo: 3 horas.