DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Prof. FELIPE ALVAREZ DAZIANO

Matemáticas Aplicadas - Control # 2

P1.- Sean $u(x,y)$ y $v(x,y)$ dos funciones de clase C^1 en $\mathbb{R}^3$. Considere los campos $\vec{w}(x,y,z) = u(x,y)\hat{\imath} + v(x,y)\hat{\jmath}$ y $\vec{w}_1(x,y,z) = v(x,y)\hat{\imath} - u(x,y)\hat{\jmath}$.
(i) Pruebe que $\vec{w}$ y $\vec{w}_1$ son conservativos si y sólo si

$$(\star)\left\{\begin{array}{rcl} \dfrac{\partial v}{\partial x} & = & \dfrac{\partial u}{\partial y} \\ \dfrac{\partial v}{\partial y} & = & -\dfrac{\partial u}{\partial x} \end{array}\right.$$

Decimos que dos funciones $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son *conjugadas* cuando satisfacen $(\star)$.
(ii) Pruebe que si $u(x,y)$ y $v(x,y)$ son conjugadas y de clase C^2 entonces $\Delta u = \Delta v = 0$ (decimos que u y v son *armónicas*) y además $\nabla u \cdot \nabla v = 0$.
(iii) Pruebe que si $u(x,y)$ es armónica entonces existe una función $v(x,y)$ conjugada de u. Ind.: Note que lo anterior es equivalente a probar que un cierto campo es conservativo.

P2.- Supongamos que un fluido está sometido a un campo de velocidades dado por $\vec{F}(x,y,z) = (x - yz)\hat{\imath} + (y + xz)\hat{\jmath} + (z + 2xy)\hat{k}$. Sea S_1 la porción del cilindro $x^2 + y^2 = 2$ que está dentro de la esfera de ecuación $x^2 + y^2 + z^2 = 4$. Sea S_2 la porción de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ que se encuentra fuera del cilindro $x^2 + y^2 = 2$. Sea Ω el volumen limitado por S_1 y S_2.
(i) Calcule $\displaystyle\int\!\!\int_{S_1} \vec{F} \cdot \vec{n} dA$ con $\vec{n}$ la normal interior al cilindro. Interprete el resultado.
(ii) Utilizando el teorema de la divergencia, calcule el flujo neto que pasa a través de las paredes de la región Ω.
(iii) Calcule directamente el flujo a través de S_2 orientada según la normal exterior a la esfera. Compare con lo obtenido en (i) y (ii).
En cada caso interprete los resultados y explicite: el sistema de coordenadas y el correspodiente vector posición que utiliza, la parametrización, el campo de normales y los elementos de superficie o volumen según corresponda.

P3.- (a) Sea $\vec{F}(x,y,z) = (6abz^3y - 20bx^3y^2, 6abxz^3 - 10bx^4y, 18abxyz^2)$. Pruebe que es conservativo y determine el potencial asociado.
(b) (i) Dados φ y $\vec{F}$ de clase C^1, pruebe que $\mathrm{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla\varphi \times \vec{F}$.
(ii) Probar que dada una curva simple, cerrada y regular por trozos Γ que es frontera de una superficie S, si $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ son de clase C^1 y C^2 respectivamente entonces

$$\int_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} = \int\!\!\int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dA.$$

con Γ y S orientadas apropiadamente.