MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2005-1

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Control 2

P1. (a) (2pts.) Para dos campos $\vec{F}, \vec{G} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, y una función escalar $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ todos de clase C^1, muestre las siguientes identidades (en cartesianas)

(i) $\operatorname{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \operatorname{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \operatorname{rot}(\vec{G})$; (ii) $\operatorname{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi \operatorname{rot}(\vec{F}) + \nabla\varphi \times \vec{F}$.

(b) (2pts.) Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea Σ una superficie orientable y $C = \partial\Sigma$ su borde geométrico, ambos orientados consistentemente. Muestre que

$$\iint_{\Sigma} \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \int_{C} \phi\nabla\psi \cdot d\vec{\ell}.$$

(c) (2pts.) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase C^1. Pruebe que si $S \cup \partial S \subset \Omega$, donde S es una superficie regular a trozos, entonces se tiene la fórmula de integración por partes

$$\iint_S g \operatorname{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\,\vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas (explique).

P2. Una esfera de radio $R > 0$ posee un núcleo de radio $a < R$ el cual se encuentra a una temperatura T_a mayor que la temperatura T_R de la superficie. Suponemos que la distribución de temperatura u entre el núcleo y la superficie tiene simetría radial, vale decir $u = u(r, t)$.
(a) (1.5pts.) Dada como conocida la ecuación del calor:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

donde $k > 0$ es la conductividad térmica de la esfera. Muestre que $u(r, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial u}{\partial t}(r, t) = \frac{k}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r}(r, t)\right).$$

Indicación: Utilice que $\Delta u = \operatorname{div}(\nabla u)$.

(b) (1pto.) Utilizando el cambio de escala $u(r, t) = \frac{1}{r}v(r, t)$, compruebe que la nueva función $v(r, t)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial v}{\partial t}(r, t) = k\frac{\partial^2 v}{\partial r^2}(r, t).$$

(c) (1.5pts.) Deduzca una expresión analítica para la distribución de temperatura en régimen permanente (también llamado régimen estacionario) en términos de r, k, a, R, T_a y T_R. Grafique la solución $u(r)$.

(d) (2pts.) Restringamos ahora nuestro estudio al plano XY dado por $z = 0$. Al igual que para potenciales eléctricos la temperatura $u(r)$, con $r = r(x, y)$, puede interpretarse como un *potencial*, llamado usualmente *potencial del calor*. Este será denotado por $\Phi(x, y) := u(r(x, y))$. Encuentre el potencial *complejo* del calor $F = \Phi + i\Psi$ correspondiente.

Indicación: Considere las siguientes integrales

$$\int \frac{dt}{(t^2 + a^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{t}{a^2\sqrt{t^2 + a^2}} + C\,; \qquad \int \frac{dt}{t^2\sqrt{t^2 + a^2}} = -\frac{\sqrt{t^2 + a^2}}{a^2 t} + C.$$

P3. (a) (1pto.) Sea $f(z) = u(x,y) + i\,v(x,y)$ una función holomorfa para la cual existen constantes $a, b, c \in I\!R$ no nulas tales que $a\,u(x,y) + b\,v(x,y) = c$. Probar que f es constante.

(b) (2.5pts.) Pruebe que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{x^2} \operatorname{Im}\left(e^{-2ix} p(x+i)\right) dx = 0,$$

para todo $p(z)$ polinomio complejo a coeficientes reales.
Indicación: considerar $f(z) = e^{-z^2} p(z)$ en un camino rectangular apropiado.

(c)(2.5pts.) Sea $f(z)$ una función holomorfa en $\mathbb{C}$ tal que $f(z) \notin \mathbb{R}_-$ para todo $z \in \mathbb{C}$, pruebe que

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) \log|f(z)| = 0.$$

Si suponemos ahora que $|f(z)|$ es el producto de una función de x y una función de y, muestre que

$$|f(z)| = e^{p(x)+q(y)}, \text{ donde } p \text{ y } q \text{ son dos polinomios de grado 2.}$$

Finalmente concluya que

$$f(z) = \exp(\alpha z^2 + \beta z + \gamma), \text{ donde } \alpha,\ \beta \text{ y } \gamma \text{ son constantes complejas.}$$

Indicación: utilice la función logarítmica compleja, la cual es holomorfa en $\mathbb{C} \setminus \mathbb{R}_-$.

(d) (**1pto. extra**) Mostrar que la parte (c) es también cierta cuando $f(z)$ es holomorfa en $\mathbb{C}$ y sólo satisface que $f(z) \neq 0$ para todo $z \in \mathbb{C}$.

Tiempo: 3 horas.
Sin consultas.

FORMULARIO

Expresiones para la *divergencia*:

- Coordenadas cilíndricas:

$$h_\rho = 1, h_\theta = \rho, h_z = 1; \quad \vec{F} = F_\rho \hat{\rho} + F_\theta \hat{\theta} + F_z \hat{k},$$
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(F_\rho \rho) + \frac{\partial}{\partial \theta} F_\theta + \frac{\partial}{\partial z}(F_z \rho)\right].$$

- Coordenadas esféricas:

$$h_r = 1, h_\theta = r \operatorname{sen}\varphi, h_\varphi = r; \quad \vec{F} = F_r \hat{r} + F_\theta \hat{\theta} + F_\varphi \hat{\varphi},$$
$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_r r^2 \operatorname{sen}\varphi) + \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\theta r) + \frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\varphi r \operatorname{sen}\varphi)\right].$$

- Coordenadas curvilíneas:

$$\operatorname{div} \vec{F} = \frac{1}{h_u h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial u}(F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v}(h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w}(h_u h_v F_w)\right].$$

Expresiones para el *rotor*:

- Coordenadas cilíndricas:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \rho \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right]\hat{\rho} + \left[\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho}\right]\hat{\theta} + \frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial}{\partial \rho}(\rho F_\theta) - \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\right]\hat{k}.$$

- Coordenadas esféricas:

$$\begin{aligned}\operatorname{rot}(\vec{F}) =& \frac{1}{r^2 \operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial}{\partial \varphi}(F_\theta r \operatorname{sen}\varphi) - \frac{\partial}{\partial \theta}(F_\varphi r)\right]\hat{r} \\ &+ \frac{1}{r \operatorname{sen}\varphi}\left[\frac{\partial F_r}{\partial \theta} - \frac{\partial}{\partial r}(F_\theta r \operatorname{sen}\varphi)\right]\hat{\varphi} + \frac{1}{r}\left[\frac{\partial}{\partial r}(F_\varphi r) - \frac{\partial F_r}{\partial \varphi}\right]\hat{\theta}.\end{aligned}$$

- Coordenadas curvilíneas:

$$\operatorname{rot}(\vec{F}) = \frac{1}{h_v h_w}\left[\frac{\partial}{\partial v} F_w h_w - \frac{\partial}{\partial w} F_v h_v\right]\hat{u} + \frac{1}{h_u h_w}\left[\frac{\partial}{\partial w} F_u h_u - \frac{\partial}{\partial u} F_w h_w\right]\hat{v} + \frac{1}{h_u h_v}\left[\frac{\partial}{\partial u} F_v h_v - \frac{\partial}{\partial v} F_u h_u\right]\hat{w}.$$

Gradiente en coordenadas curvilíneas:

$$\vec{\nabla} = \hat{u}\frac{1}{h_u}\frac{\partial}{\partial u} + \hat{v}\frac{1}{h_v}\frac{\partial}{\partial v} + \hat{w}\frac{1}{h_w}\frac{\partial}{\partial w}.$$