MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2005-1
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Control 3

P1. (a) Encontrar todas las series de Taylor y de Laurent con centro 0, y determinar las regiones para las cuales estas convergen, de las siguientes funciones:
(i) $f(z) = z^{-5}\cos z$, (ii) $f(z) = ze^{1/z^2}$, (iii) $f(z) = 1/(z^3 - z^4)$.

(b) Calcular las siguientes integrales
(i) $\int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{\operatorname{sen}(2\theta)}}{3-5\cos\theta} d\theta$, (ii) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x\operatorname{sen}(2x)}{(x-4)(x^2+3)}\, dx$.

P2. (a) Demuestre la siguiente *regla de l'Hôpital* para funciones a variable compleja:

Proposición. *Sean $f, g \in H(\Omega)$, $p \in \Omega$ y $n \geq 1$ tales que $g(p) = \ldots = g^{(n-1)}(p) = 0 \neq g^{(n)}(p)$. Entonces*

$$\lim_{z\to p} \frac{f(z)}{g(z)} = \begin{cases} \textit{no existe} & \textit{si } f^{(k)}(p) \neq 0 \textit{ para algún } k \in \{0,1,\cdots,n-1\}. \\ \dfrac{f^{(n)}(p)}{g^{(n)}(p)} & \textit{si } f^{(k)}(p) = 0 \textit{ para todo } k \in \{0,1,\cdots,n-1\} \end{cases}$$

Indicación: Utilice series de potencias en torno a p.

(b) Sean $n \in \mathbb{N}$ y la función

$$F(z) = \frac{\operatorname{sen}^n(i\pi z)}{(z-i)^n e^{(z-i)^2}}.$$

Demuestre usando la regla de l'Hôpital que

$$\lim_{z\to i} F(z) = (-1)^n (i\pi)^n.$$

Indicación: Pruebe "informalmente" que $\frac{d^k}{dz^k}[\operatorname{sen}^n(i\pi z)]\Big|_{z=i} = \begin{cases} 0 & \text{si } 1 \leq k < n \\ n!(-1)^n(i\pi)^n & \text{si } k = n. \end{cases}$

Concluir que la función

$$G(z) = \frac{\operatorname{sen}^n(i\pi z)}{(z-i)^{2n} e^{(z-i)^2}}$$

tiene un polo de orden n en $z = i$.

(c) Calcular la integral

$$\oint_\Gamma \frac{\operatorname{sen}(i\pi z)}{(z-i)^2 e^{(z-i)^2}} dz,$$

donde Γ es cualquier círculo cerrado centrado en el origen del plano complejo y de radio $R > 1$.

P3. Considere la función $u(x,t)$ que describe las oscilaciones de una cuerda de longitud $L = 1$, situada en posición horizontal, y que está sometida a una fuerza externa proporcional a la distancia a uno de sus extremos:

$$u_{tt} - u_{xx} = kx, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \tag{1}$$

donde $k > 0$ es la constante asociada a la fuerza externa. Esta cuerda está además fija en sus extremos, y los desplazamientos y velocidades iniciales de sus oscilaciones son nulos:

$$u(0,t) = u(L,t) = 0, \quad t > 0; \qquad u(x,0) = u_t(x,0) = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{2}$$

Para determinar $u(x,t)$, solución de (1)-(2), introduzca una función auxiliar $y(x,t) = u(x,t) + \phi(x)$, de manera que para cierta función $\phi(x)$ *adecuada*, $y(x,t)$ sea solución de la ecuación (1) homogénea:

$$y_{tt} - y_{xx} = 0, \quad x \in [0, L],\ t > 0, \tag{3}$$

con las siguientes condiciones de borde e iniciales

$$y(0,t) = y(L,t) = 0, \quad t > 0; \qquad y(x,0) = \phi(x), \ \ y_t(x,0) = 0, \quad x \in [0, L]. \tag{4}$$

Encuentre $y(x,t)$ vía separación de variables, y deduzca una expresión para $u(x,t)$.

Indicación: Note que ϕ debe ser de la forma $\phi(x) = Ax^3 + Bx$, donde $A, B \in \mathbb{R}$. (Justifique)

Tiempo: 3 horas.
Sin consultas.