PREGUNTA 1

Matematicas Aplicadas **Control # 3** **10/11/95**

PREGUNTA 1

i) Encuentre el desarrollo en serie de potencias (Taylor o Laurent) en el anillo $0 < |z| < 1$ y luego en el anillo $1 < |z| < 3$ para la función

$$f(z) = \frac{1}{(z-i)(z+3)}$$

Indicación: Descomponga en fracciones parciales.

ii) Para la función definida a continuación, estudie sus singularidades indicando su tipo: polos (de que orden), removibles o esenciales. Calcule los residuos en cada singularidad.

$$f(z) = \frac{e^z - 1}{z^2 + z^4}$$

iii) Calcule por métodos de variable compleja:

$$\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^6}\, dx$$

PREGUNTA 2

Considere el problema:

$$\begin{aligned}
\Delta u &= 0 && \text{en } [0,\pi]\times[0,\pi] \\
u(x,0) &= 0 && \text{para } x\in[0,\pi] \\
u(0,y) &= 0 && \text{para } y\in[0,\pi] \\
u(x,\pi) &= x && \text{para } x\in[0,\pi] \\
u(\pi,y) &= y + f(y) && \text{para } y\in[0,\pi]
\end{aligned}$$

i) Encuentre por simple inspección una solución u_0 para el caso $f \equiv 0$. Intente con productos de las variables...

ii) Aprovechando la linealidad del problema, resuelva ahora para una función f arbitraria mediante separación de variables.

PREGUNTA 3

i) Demuestre, utilisando los resultados vistos en clase, que $f \in L^2([-\pi,\pi])$ se puede escribir como:

$$f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \hat{f}_n\, e^{inx}$$

donde

$$\hat{f}_n := \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, e^{-int}\, dt$$

Que pasa si f es a valores complejos?

Ind: Escriba $cos(t)$ y $sen(t)$ en términos de e^{it} y e^{-it}.

ii) Demuestre que si $f : I\!R \longrightarrow I\!R$ es k veces continuamente derivable y periodica de periodo 2π entonces:

$$\widehat{f_n^{(k)}} = (i\, n)^k \, \hat{f}_n$$

iii) Suponga que $F(z)$ está definida y es analítica en todo un anillo $r_1 < |z| < r_2$ que contiene al circulo unitario ($|z| = 1$). Llamemos $f(\theta)$ a la restricción de F sobre el circulo unitario, siendo θ el argumento (o ángulo polar) de z. Demuestre que :

$$F(z) = \sum_{n \in Z\!\!\!Z} \hat{f}_n \, r^n \, e^{in\theta} \qquad r_1 < |z| < r_2$$

donde $z = r\, e^{i\theta}$.