Universidad de Chile.
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas.
Departamento de Ingeniería Matemática.
Santiago, 13 de Noviembre de 2003.

Profs.: Salomón Alarcón y Felipe Alvarez.
Tiempo: 3:00 hrs.

CONTROL 3: MA26B-01 Matemáticas Aplicadas 2003

P1.-

(a) (2.0 ptos.) Usando la fórmula integral de Cauchy apropiadamente, calcule

$$\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

donde $\Gamma = \partial D(0,3)$ es la circunferencia de centro 0 y radio 3, recorrida en sentido antihorario.

(b) (4.0 ptos.) Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}.$$

P2.-

(a) (2.0 ptos.) Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa no nula y $p \in \mathbb{C}$ una raíz de f, es decir $f(p) = 0$. Pruebe que existen constantes $r > 0$ y $m \geq 1$, y una función $Q(z)$ holomorfa en $D(p,r)$ con $Q(p) \neq 0$, tales que para todo $z \in D(p,r)$, $f(z) = (z-p)^m Q(z)$. Deduzca que p es un polo simple de $g(z) = f'(z)/f(z)$ y que $\text{Res}(g;p) = m$.

(b) (4.0 ptos.) Sea $P(z)$ un polinomio de grado n. Una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$ de $P(z)$ se dice *estable* si su parte real es estrictamente negativa, i.e., $Re(\lambda) < 0$. Suponiendo que el polinomio no tiene raíces imaginarias puras, i.e., $P(iy) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, pruebe que

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P'(iy)}{P(iy)} dy = \text{número total de raíces estables de } P(z),$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de las raíces.

P3.-

(a) (2.0 ptos.) Demuestre que para todo $a > 0$, se tiene

$$\int_0^{\pi} e^{a\cos\theta} \cos(a \operatorname{sen}\theta) d\theta = \pi.$$

Indicación: considere la función $f(z) = e^{az}/z$.

(b) (4.0 ptos.) Pruebe que

$$\int_0^{+\infty} \frac{\ln(x^2+1)}{x^2+1} dx = \pi \ln 2.$$

Indicación: integre la función $f(z) = \frac{\log(z+i)}{z^2+1}$.