MA26B Matemáticas Aplicadas. Semestre 2005-1
Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Examen

P1. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera es $\partial\Omega$.

(i) Demuestre la siguiente identidad de Green: si $u,\, v \in C^1(\overline{\Omega}) \cap C^2(\Omega)$ entonces

$$\iiint_{\Omega} (v\Delta u + \nabla u \nabla v)\, dV = \iint_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial n} v\, dS,$$

donde n es el vector unitario normal (exterior) a $\partial\Omega$, y $\frac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot n$ es la derivada normal de u.
Indicación: utilice el teorema de la divergencia.

(ii) Consideremos la ecuación de Laplace con condiciones de borde de tipo Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta u = f & \text{en } \Omega \\ u = g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

donde $f : \Omega \to \mathbb{R}$ y $g : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ son funciones continua y continuamente diferenciable, respectivamente. Pruebe que la ecuación de Laplace tiene una única solución u. Para esto, suponga que existen dos soluciones u_1 y u_2, y defina $w = u_1 - u_2$. Pruebe finalmente que $w = 0$ en Ω.
Indicación: verifique que $\Delta w = 0$ en Ω y que $w = 0$ sobre $\partial\Omega$, y utilice la identidad de Green en (i).

P2. Resuelva usando el método de separación de variables la siguiente ecuación diferencial

$$u_{tt} = \alpha^2 u_{xx} - \beta u, \quad 0 < x < 1, t > 0,$$

(α, β constantes positivas) con condiciones de borde

$$u(0,t) = u(1,t) = 0, \quad t \geq 0$$

y condiciones iniciales

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad u_t(x,0) = 0, \qquad 0 \leq x \leq 1.$$

P3. La mezcla de dos fluidos en un tubo infinitamente largo puede modelarse a través de la ecuación de convexión-difusión:

$$u_t = u_x + \alpha u_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < +\infty.$$

(i) Probar que la transformada de Fourier con respecto a la variable espacial x, $\hat{u}(s,t) = \widehat{u(\cdot,t)}(s)$, es igual a

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) \exp(is - \alpha s^2)t.$$

(ii) Deducir que la solución puede expresarse como

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) G(x-y,t) dy.$$

Determinar el núcleo de Green $G(x,t)$.

Indicación: Utilice la transformada de Fourier de la función $e^{-x^2/2}$.

(iii) Verificar que el núcleo de Green $G = G(x,t)$ es integrable (más aún $\int_{-\infty}^{+\infty} G(x,t)dx = 1$) y es solución de:

$$G_t = G_x + \alpha G_{xx}, \qquad -\infty < x < +\infty,\ t > 0,$$

con condición inicial

$$G(x,0) := \lim_{t \to 0^+} G(x,t) = \delta(x), \qquad -\infty < x < +\infty,$$

donde $\delta(x) := \begin{cases} +\infty, & \text{si } x = 0 \\ 0, & \text{si } x \neq 0 \end{cases}$ es la función *delta de Dirac*.

Tiempo: 3 horas.
Sin consultas.