

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas Guía #1: Curvas e Integrales de Línea

1. (a) Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente: el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(a, 0)$ y $(-a, 0)$ es constante e igual a $b > 0$ (Lemniscata).

Respuesta: $\theta = \arccos\left(\frac{r^4+a^4-b^2}{2a^2r^2}\right)$

- (b) Sea Γ la curva parametrizada por:

$$\vec{r}(t) = (Re^{-at} \cos t, Re^{-at} \sin t, t) \quad t \in [0, 4\pi]$$

Bosquejar Γ , determinar la parametrización en longitud de arco, la curvatura, y el vector binormal en cada punto de la curva.

- (c) Encontrar la longitud de la curva definida por $y = x^3$ y $z = \frac{\sqrt{6}}{2}x^2$.

2. Una partícula se mueve describiendo una trayectoria Γ sobre el manto del cono $x^2 + y^2 = z^2$, de forma tal que su altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z = e^{-\theta}$ con $\theta \in [0, \infty[$.

- (a) Encuentre una parametrización de Γ . Dibuje la curva.

Respuesta: Parametrización $\vec{r}(\theta) = (e^{-\theta} \cos(\theta), e^{-\theta} \sin(\theta), e^{-\theta})$

- (b) Calcule el largo de Γ .

Respuesta: $L(\Gamma) = \sqrt{2}$

3. (a) Sea Γ la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio R_0 , la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R > R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función longitud de arco. Estudie la curvatura y torsión donde tenga sentido.

Respuesta: Parametrización:

$$x(\theta) = (R + R_0)\sin(\phi) + R_0\sin\left(\frac{R+R_0}{R_0}\phi\right)$$

$$y(\theta) = (R + R_0)\cos(\phi) + R_0\cos\left(\frac{R+R_0}{R_0}\phi\right)$$

- (b) Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$.

Indicación: Note que $(1, 1, 1)$ es vector normal al plano que contiene a la circunferencia (¿Cómo lo calcularía?)

4. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{d^2 z}{d\theta^2} = z$$

con condiciones iniciales $z(0) = 1$, $\frac{dz}{d\theta}(0) = 0$, donde (ρ, θ, z) las coordenadas cilíndricas del punto.

(a) Encuentre una parametrización de la trayectoria Γ descrita por la partícula (use el ángulo θ como parámetro para describir la curva).

Respuesta: $\vec{r}(\theta) = (\cos \theta, \sin \theta, \cosh \theta)$

(b) Calcule la longitud de Γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.

Respuesta: $L(\Gamma) = \sinh(2\pi)$

(c) Calcule los vectores tangente, normal y binormal, así como la curvatura y torsión de Γ .

Respuesta:

$$\begin{aligned}\hat{t} &= \frac{1}{\cosh \theta}(-\sin \theta, \cos \theta, \sinh \theta) \\ \hat{n} &= \frac{1}{\sqrt{2} \cosh \theta}(-\cos \theta \cosh \theta + \sin \theta \sinh \theta, -\sin \theta \cosh \theta - \cos \theta \sinh \theta, 1), \\ \hat{b} &= \frac{1}{\sqrt{2} \cosh(\theta)}(\cos \theta \cosh \theta + \sin \theta \sinh \theta, \sin \theta \cosh \theta - \cos \theta \sinh \theta, 1), \\ k &= \frac{\sqrt{2}}{\cosh^2 \theta}, \quad \tau = \frac{\sinh \theta}{\cosh^2 \theta}\end{aligned}$$

5. Considere una curva Γ en \mathbb{R}^3 con la siguiente propiedad: existe un punto \vec{P}_0 por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{\sigma} : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en términos del parámetro longitud de arco s (camino recorrido).

(i) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, L(\Gamma)] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{\sigma}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

(ii) Demuestre que se cumplen las igualdades

$$\begin{aligned}1 - k(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0\end{aligned}$$

donde $k(s)$ y $\tau(s)$ son respectivamente la curvatura y la torsión de Γ .

(iii) Concluya que Γ es una curva plana.

(iv) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

6. Sea $\vec{\sigma} : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva Γ . Supondremos que $\vec{\sigma} \in C^3$. Pruebe que:

- (i) $\tau(s) = [\vec{\sigma}'(s) \times \vec{\sigma}''(s)] \cdot \vec{\sigma}'''(s) / \|\vec{\sigma}''(s)\|^2$, donde $\tau(s)$ es la torsión de Γ .
(ii) Usando (i), calcule la torsión de la hélice $\vec{r}(t) = (\cos(t), \sin(t), t)$ con $t \in [0, 4\pi]$. Observe que para aplicar la fórmula anterior debe usar la parametrización en logitud de arco.

Respuesta: $\tau = \frac{1}{4}$

7. Dada una función continua y no nula $g : [0, l_0] \rightarrow \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subset \mathbb{R}^2$ de longitud l_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$.
Indicación: Defina

$$\theta(s) = \int_0^s g(\tau) d\tau, x(s) = \int_0^s \cos \theta(\tau) d\tau, y(s) = \int_0^s \sin \theta(\tau) d\tau$$

y estudie $\vec{\sigma}(s) = x(s)\hat{i} + y(s)\hat{j}$.

8. Sea Γ el grafo de una función diferenciable $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, es decir

$$\Gamma = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 : x \in [a, b]\}.$$

- (i) Determine una fórmula para la longitud de Γ .
(ii) Suponiendo que f es dos veces diferenciable, pruebe que la curvatura en el punto $(x, f(x))$ viene dada por

$$k(x) = \frac{|f''(x)|}{[1 + f'(x)^2]^{3/2}}.$$

9. (a) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria en \mathbb{R}^3 con aceleración cero. Probar que $\vec{r}(t)$ parametriza una recta o un punto.
(b) Sea $\vec{r}(t)$ una trayectoria, $\vec{v}(t)$ la velocidad y $\vec{a}(t)$ la aceleración de una partícula de masa $m > 0$. Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ un campo de fuerzas y supongamos que $\vec{F}(\vec{r}(t)) = m\vec{a}(t)$ (segunda ley de Newton). Probar que:

$$\frac{d}{dt}[m\vec{r}(t) \times \vec{v}(t)] = \vec{r}(t) \times \vec{F}(\vec{r}(t))$$

es decir “la tasa de cambio del momento angular es igual al torque”. ¿Qué ocurre si $\vec{F}(\vec{r})$ es paralelo a \vec{r} ?

10. Un campo de fuerzas bidimensional \vec{F} está definido por:

$$\vec{F}(x, y) = (x + y)\hat{i} + (x - y)\hat{j}$$

Demostrar que el trabajo realizado por esa fuerza al mover una partícula a lo largo de una curva parametrizada por

$$\vec{r}(t) = x(t)\hat{i} + y(t)\hat{j}$$

con $a \leq t \leq b$, depende únicamente de $\vec{r}(a)$ y $\vec{r}(b)$. Calcular el trabajo cuando $x(a) = 1$, $x(b) = 2$, $y(a) = 3$ e $y(b) = 4$.

Respuesta: $W = 3$

11. ¿Conservativo o no conservativo?

Sea el campo vectorial $\vec{F} : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ definido por

$$\vec{F}(x, y) = \left(\frac{-y}{x^2 + y^2}, \frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

Dada una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ se define

$$n(\Gamma) := \frac{1}{2\pi} \int_{\Gamma} \vec{F} \cdot d\vec{r}.$$

(a) Para las siguientes parametrizaciones, bosqueje la curva correspondiente y calcule el valor de $n(\Gamma)$.

(i) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(ii) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), -r \sin(t)), t \in [0, 2\pi]$.

(iii) $\vec{r}(t) = (r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 4\pi]$.

(iv) Γ es la frontera del cuadrado $[-1, 1] \times [-1, 1]$ recorrida en el sentido de las manecillas del reloj.

Pregunta: ¿Es \vec{F} un campo conservativo en todo $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$? Dada Γ curva cerrada en torno al origen, a $n(\Gamma)$ se le llama el *número de enrollamiento anti-horario* de Γ . Justifique esta terminología a partir de los ejemplos anteriores.

(b) Considere la curva Γ parametrizada por

$$\vec{r}(t) = (2r - r \cos(t), r \sin(t)), t \in [0, 2\pi].$$

Para calcular $n(\Gamma)$ pruebe que existe $g : R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\vec{F}(x, y) = \nabla g(x, y)$ en un rectángulo R que contiene a la curva Γ . Deduzca el valor de $n(\Gamma)$ para toda curva contenida en dicho rectángulo.

Indicación: Busque g de la forma

$$g(x, y) = f\left(\frac{y}{x}\right)$$

y recuerde que $\frac{d}{dt}(\arctg)(t) = \frac{1}{1+t^2}$.

(c) ¿Hay alguna contradicción entre los resultados obtenidos en las partes (a) y (b)? Justifique.

12. Sea $\vec{F} = (2x + y^2)\hat{i} + (3y - 4x)\hat{j}$. Calcular la integral $\int \vec{F} \cdot d\vec{r}$ a lo largo de la lenteja formada en el primer cuadrante por las ecuaciones $y = x^2$ y $x = y^2$.

Respuesta: $W = \frac{1}{5}$

13. Consideremos el campo de fuerzas $\vec{F} = y^2\hat{i} + z^2\hat{j} + x^2\hat{k}$.

(i) Calcular la integral de trabajo de \vec{F} a lo largo del triángulo de vértices $(0, 0, 0)$, $(0, a, 0)$ y $(0, 0, a)$ donde $a > 0$.

Respuesta: $W = \frac{a^3}{3}$

(ii) Calcular el trabajo realizado por esta misma fuerza sobre una partícula que se mueve a lo largo de la curva de intersección de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ y el cilindro semi-infinito $x^2 + y^2 - x = 0$, $z \geq 0$. La trayectoria se describe de manera de dejar la región de la esfera que es interior a la curva a la izquierda de un observador que la recorre (*i.e.* sentido anti-horario según \hat{k}).

Respuesta: $W = \frac{16}{15} - \frac{\pi}{4}$

14. (i) Encontrar un potencial para el campo de fuerzas definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)\hat{i} + (2y \sin x - 4)\hat{j} + (3xz^2 + 2)\hat{k}.$$

Respuesta: $G(x, y, z) = y^2 \sin x + xz^3 - 4y + 2z$

(ii) Encontrar un potencial para el campo de fuerzas definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xz + 2xy}{x^2 + y^2}, \frac{2yz}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) - z \right)$$

y calcular su integral de trabajo sobre la curva Γ descrita en el problema 2.

(iii) Calcular la integral de trabajo sobre la misma curva Γ para el campo

$$\vec{F}(x, y, z) = \left(\frac{2xz + 2xy}{x^2 + y^2}, \frac{2yz - 2xy}{x^2 + y^2}, \ln(x^2 + y^2) - z \right).$$

Puede ser de utilidad saber que $\int_0^{\infty} e^{-\theta} \cos^3 \theta d\theta = 2/5$.

15. Un ciclista sube una montaña parabólica de ecuación $x^2 + y^2 + z = 2\pi$ siguiendo un camino Γ de modo de alcanzar la cima tras realizar una vuelta en torno a la montaña.

(i) Utilizando coordenadas cilíndricas, deducir una parametrización de Γ sabiendo que se satisface $\frac{dz}{d\theta} = a$ con $a > 0$. Suponga que inicialmente el ciclista se encuentra en el punto de coordenadas $(\sqrt{2\pi}, 0, 0)$.

Respuesta: $\vec{r}(\theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, a\theta + 2\pi(1 - 2a))$

(ii) Sea $\vec{G}(x, y, z) = (y^2/2, y(x+z), y^2/2)$. Encuentre un potencial de \vec{G} y calcule el trabajo de \vec{G} a lo largo de Γ .

Respuesta: $W = 0$

(iii) Sea $\vec{F}(x, y, z) = (y^2/2, y(x+z), -y^2/2)$. Calcular el trabajo de \vec{F} a lo largo de Γ .

16. (a) Calcular el trabajo realizado al llevar una partícula sobre un arco de cicloide (desde el origen hasta la primera vuelta de la circunferencia de radio $a > 0$ que la define) con el campo

$$\vec{F}(x, y) = x\hat{i} - 5y\hat{j}$$

Respuesta: $W = 2(R\pi a)^2 - 2Ra\pi \sin(2\pi a) + (3Ra - \frac{3}{2}a^2)(\cos(2\pi a) - 1)$

(b) Calcular el centro de masa de un resorte helicoidal inscrito en un cono de altura $h > 0$ y base $x^2 + y^2 = a^2$, el cual da dos vueltas antes de llegar arriba y tiene densidad $\rho(x, y, z) = z$.

Respuesta: $r_G = (0, 0, \frac{4}{3}\pi h)$

17. Considere la curva Γ que se forma al intersectar las superficies

$$\begin{aligned} x^2 + y^2 &= 4 \\ x^2 + z^2 &= 4 + y^2 \end{aligned}$$

tomando en cuenta sólo la parte de la curva con $z \geq 0$.

(i) Encuentre una parametrización de Γ . Sugerencia: use coordenadas cilíndricas.

(ii) Calcule el centro de masa suponiendo densidad lineal de masa dada por $\rho(x, y, z) = xy$. Puede usar argumentos de simetría.

18. Encuentre la masa total del alambre parametrizado por

$$\vec{r}(t) = (6t^2, 4\sqrt{2}t^3, 3t^4) \quad \text{con } t \in [0, 1]$$

en los siguientes casos:

(i) la densidad en el punto que corresponde a t es t^2 ;

(ii) la densidad en un punto a una distancia s del origen a lo largo de la curva es $s + 1$;

(iii) la densidad en un punto es igual a su distancia al origen medida en \mathbb{R}^3 .