DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas

Guía #2: Superficies e Integrales de Flujo

1. Considerar la superficie en $\mathbb{R}^3$ parametrizada por

$$\Phi(r,\theta) = (r\cos\theta, \sin\theta, \theta), \qquad 0 \le r \le 1 \text{ y } 0 \le \theta \le 4\pi.$$

a) Esbozar y describir la superficie.
b) Hallar una expresión para una normal unitaria a la superficie.
Respuesta: $\hat{n} = \frac{1}{\sqrt{1+\cos^2\theta}}(0, -\cos\theta, \cos^2\theta)$
c) Hallar una ecuación para el plano tangente a la superficie en el punto (x_0, y_0, z_0).
Indicación: Utilizar el vector normal calculado en b)
d) Si (x_0, y_0, z_0) es un punto sobre la superficie, mostrar que el segmento de recta horizontal de longitud unitaria que va del eje z a (x_0, y_0, z_0) está contenido en la superficie y en el plano tangente a la superficie en (x_0, y_0, z_0).

2. El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.
Respuesta: $\frac{6-\pi}{3(\pi-2)}$

3. Hallar la masa M de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a algún punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.
Respuesta: $M = \frac{16}{3}\pi R^3$

4. a) Calcular el área A_1 de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \ge 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.
Respuesta: $A_1 = \pi R$
b) ¿Cuál es el área A_2 de la parte de la esfera que está dentro del cono?
Respuesta: $A_2 = \pi R^2(2 - \sqrt{2})$

5. Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \ge 0$ y su base $x^2 + y^2 + z^2 \le 1$, $z = 0$. Sea $\vec{E}$ el campo eléctrico definido por

$$\vec{E}(x, y, z) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}.$$

Hallar el flujo eléctrico f a través de S.
Idea: Descomponer S en dos partes S_1 y S_2 y evaluar $\iint\limits_{S_1} \vec{E} \cdot dS$ y $\iint\limits_{S_2} \vec{E} \cdot dS$ por separado.
Respuesta: $f = 4\pi R^3$

6. Calcular la integral $\iint\limits_{S} F \cdot dS$, donde S es la superficie de la semibola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ y

$$\vec{F} = (x + 3y^5)\hat{\imath} + (y + 10xz)\hat{\jmath} + (z - xy)\hat{k}.$$

(Hacer que $\hat{n}$, la normal unitaria, apunte hacia arriba).
Respuesta: $\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot dS = 2\pi R^3$

7. Sea S la superficie de la esfera unitaria. Sean $\vec{F}$ un campo vectorial y F_r su componente radial. Probar que

$$\iint\limits_{S} \vec{F} \cdot dS = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} F_r sen\phi d\phi d\theta.$$

8. Una esfera que está inscrita en un cilindro circular y recto, es cortada por 2 planos paralelos entre sí, y perpendiculares al eje del cilindro.
Demuestre que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre los dos planos tienen la misma área.

9. Sea S la superficie definida por $z = x\phi(\frac{y}{x})$ donde ϕ es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas.
Indicación: Encontrar una parametrización γ de esta superficie. Calcular el plano tangente a partir de la normal.

10. Calcular el centro de masa de una semiesfera de radio R, centrada en el origen con densidad superficial de masa $\sigma(x, y) = x^2 + y^2$.
Respuesta: $(0, 0, \frac{1}{2R})$

11. Calcule el área del sector del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y simultáneamente en el octante positivo. Grafique.

12. Hallar el área de la superficie limitada por la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

13. Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in I\!\!R^3$ (que no está en S). Demuestre que:

$$\iint_S \frac{1}{\|\vec{x} - \vec{p}\|} = \begin{cases} 4\pi R & \text{si } p \in \text{interior}(S) \\ 4\pi R^2/d & \text{si } p \notin \text{interior}(S) \end{cases}$$

determine el valor de d.

14. a) Obtenga una parametrización del paraboloide de ecuación $z = 4 - x^2 - y^2$, $z \geq 0$. Calcule su área.
b) Obtenga el flujo del campo vectorial (x^2, y^2, z^2) a través del manto del paraboloide de la parte a)

15. Sean S una superficie suave y $\vec{P}$ un punto, tales que toda recta que pasa por $\vec{P}$ corta a S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semi-rectas que parten de $\vec{P}$ y pasan por S, y sea ε_a la intersección de Ω con la superficie esférica de centro $\vec{P}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{Area de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint_S \frac{(\vec{x} - \vec{P}) \cdot \vec{n}}{\|\vec{x} - \vec{P}\|^3} dS.$$

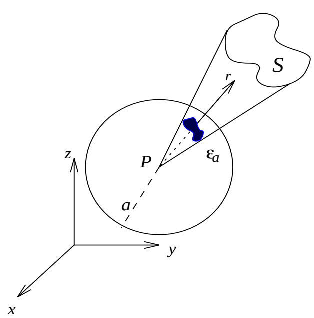

Figura 1: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a P.

16. Si $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ y S es la superficie del cubo limitado por $x = 0, y = 0,$ $z = 0,\ z = 1, y = 1, z = 1$. Calcular $\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{s}$.

    Respuesta: $\iint\limits_S \vec{F} \cdot d\vec{s} = 0$.

17. Considere la superficie Σ de la semiesfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $y \leq 0$ y el campo vectorial

    $$\vec{F}(x, y, z) = (x + \cos(x + y), y + \cos(x + y), \sqrt{x^2 + y^2} + 2z\sin(x + y)).$$

    Calcular el flujo Φ de $\vec{F}$ a través de Σ orientada según la normal que apunta hacia abajo.
    Respuesta: $\Phi = 2\pi R^3$

18. Considere la superficie S definida por $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$, a través de la cual se practica una doble abertura en un ángulo a (como la figura). Suponiendo una distribución de masa uniforme de densidad σ, calcular la masa total y el centro de masa de S. Puede usar argumentos de simetría.

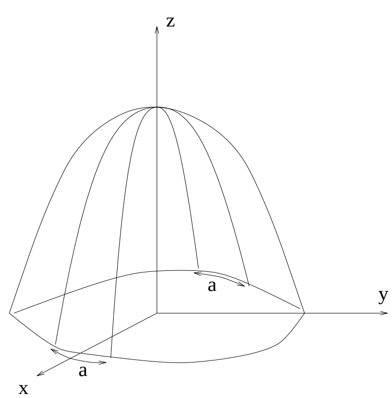

Figura 2: Paraboloide de ecuación $z = 1 - x^2 - y^2, \quad z \geq 0$

19. Dada la superficie definida por $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$
    a) Bosquejar su gráfico. ¿Qué curvas se producen en las intersecciones con los planos $x = cte, y = cte', z = cte''$?
    b) Calcule el plano tangente en el punto (1,1,2).
    c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.

20. Sea S una superficie cuya normal forma un ángulo θ con la vertical. Encuentre el área de la proyección vertical sobre xy de S en función de θ y el área de S.

21. Consideremos la región Ω definida por la inecuaciones
$x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \in [0, b]$; $x^2 + y^2 \leq a^2$
donde $a > 0$ y $b > 0$ son constantes dadas, y el campo vectorial
$\vec{F}(x, y, z) = (yz, xz, xy)$
a) Evalúe las integrales de flujo sobre cada una de las cinco caras de la región (considere la orientación exterior). Haga un bosquejo.
Respuestas: $\frac{a^4}{8}, \frac{-a^4}{8}, \frac{-a^2b^2}{4}, \frac{-a^2b^2}{4}, \frac{a^2b^2}{2}$
b) Interprete físicamente los cinco flujos calculados, así como el flujo total a través de la superficie Ω.

22. (A) *Cuadratura de una superficie curva.*
Al calcular el área de una superficie curva, normalmente aparecen números irracionales como π. El siguiente ejemplo muestra que esto no siempre es así.
(i)Determinar el área de la superficie de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ incluida dentro del cilindro $x^2 + y^2 = ay$ (explote la simetría y use coordenadas cilíndricas).
Respuesta: $A = 2a^2\pi - 4a^2$
(ii)Deduzca que el valor del área de la semi-esfera $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ con $y \geq 0$ que está incluida dentro del cilindro es un cuadrado perfecto.

(B) *Superficie de revolución.*
Consideremos el sistema de coordenadas dado por:

$$\vec{r}(x, \rho, \theta) = (x, \rho\cos\theta, \rho\sin\theta)$$

con $x \in I\!R$, $\theta \in [0, 2\pi]$ y $\rho \geq 0$.
(i)Determinar el triedro de vectores unitarios $\hat{x}, \hat{\rho}, \hat{\theta}$. ¿Son ortogonales? Calcule $\hat{\theta} \times \hat{x}$ y $\hat{\theta} \times \hat{\rho}$.
Respuesta: $\hat{x} = (1, 0, 0)$, $\hat{\rho} = (0, \cos\theta, \sin\theta)$, $\hat{\theta} = (0, -\sin\theta, \cos\theta)$,
$\hat{\theta} \times \hat{x} = \hat{\rho}$, $\hat{\theta} \times \hat{\rho} = -\hat{x}$
(ii)Dada una función no negativa y diferenciable $f : [a, b] \to I\!R_+$, bosqueje la superficie de ecuacion $y^2 + z^2 = f(x)^2$. Verifique que una parametrización de esta superficie es

$$\vec{r_1}(x, \theta) = x\hat{\imath} + f(x)\hat{\rho}$$

(iii)Exprese el área de la superficie definida en (ii) como una integral en términos de f y f'.
Respuesta: $A(S) = 2\pi \int\limits_a^b f(x)\sqrt{1 + f'(x)^2}dx$