Profs. Felipe Alvarez
Roberto Cominetti

Matemáticas Aplicadas

Guía #2: Superficies e Integrales de Flujo

P1.- Considerar la superficie $\Sigma \subset I\!R^3$ parametrizada por

$$\vec{r}(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta, \theta), \qquad 0 \leq r \leq 1 \text{ y } 0 \leq \theta \leq 4\pi.$$

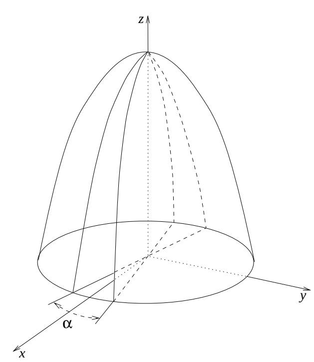
a) Bosquejar la superficie.
b) Hallar una normal unitaria a la superficie.
c) Hallar la ecuación del plano tangente a Σ en el punto $\vec{r}_0 = (x_0, y_0, z_0) \in \Sigma$.
d) Si $\vec{r}_0 \in \Sigma$, mostrar que el segmento de recta horizontal que va del eje z a $\vec{r}_0$ está contenido en Σ y en el plano tangente a la superficie en $\vec{r}_0$.

P2.- Sea S la superficie definida por $z = x\phi(y/x)$ donde ϕ es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas. Indicación: calcule el plano tangente a partir de la normal.

P3.- Dada la superficie definida por $z = 4 - x^2 - y^2, z \geq 0$
a) Bosquejar su gráfico. ¿Qué curvas se producen en las intersecciones con los planos $x = cte, y = cte', z = cte''$?.
b) Calcule el plano tangente en el punto (1,1,2).
c) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.

P4.- Considere la superficie S definida por $z = 1 - x^2 - y^2, z \geq 0$, a través de la cual se practica una doble abertura en un ángulo α.

Suponiendo una distribución de masa uniforme de densidad σ, calcular la masa total y el centro de masa de S. Puede usar argumentos de simetría.



P5.- El cilindro $x^2 + y^2 = x$ divide la esfera unitaria S en dos regiones S_1 y S_2, donde S_1 está dentro del cilindro y S_2 afuera. Hallar la razón de las áreas $A(S_2)/A(S_1)$.

P6.- Una esfera inscrita en un cilindro es cortada por dos planos perpendiculares al eje del cilindro. Demuestre que las porciones de la esfera y del cilindro comprendidas entre los dos planos tienen la misma área.

P7.- Hallar el área del sector del cilindro $x^2 + z^2 = a^2$ que se encuentra dentro del cilindro $x^2 + y^2 = 2ay$ y simultáneamente en el octante positivo. Grafique.

P8.- Hallar el área de la superficie limitada por la intersección de los cilindros $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$.

P9.- a) Calcular el área de la parte del cono $x^2 + y^2 = z^2$ con $z \geq 0$ que está dentro de la esfera $x^2 + y^2 + z^2 = 2Rz$, donde R es una constante positiva.
b) ¿Cuál es el área de la parte de la esfera que está dentro del cono?

P10.- Hallar la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x, y, z) \in S$ la densidad de masa es igual a la distancia de (x, y, z) a un punto fijo $(x_0, y_0, z_0) \in S$.

P11.- Calcular el centro de masa de una semiesfera de radio R centrada en el origen, con densidad superficial de masa $\sigma(x, y, z) = x^2 + y^2$.

P12.- Sea S la esfera de radio R y $\vec{p} \in I\!R^3 \setminus S$. Demuestre que:

$$\iint_S \frac{dA}{\|\vec{r} - \vec{p}\|} = \begin{cases} 4\pi R & \text{si } \|p\| < R \\ 4\pi R^2/\|\vec{p}\| & \text{si } \|\vec{p}\| > R \end{cases}$$

P13.- Sea S una superficie cuya normal forma un ángulo θ con la vertical. Encuentre el área de la proyección vertical sobre el plano xy de S en función de θ y el área de S.

P14.- Sea S la superficie cerrada formada por el hemisferio $x^2+y^2+z^2 = 1, z \geq 0$ y su base $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, z = 0$. Sea $\vec{E}$ el campo $\vec{E}(x, y, z) = 2x\hat{\imath} + 2y\hat{\jmath} + 2z\hat{k}$. Hallar el flujo a través de S orientada exteriormente.

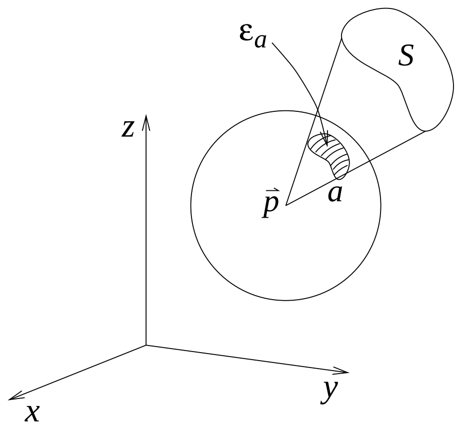
P15.- Calcular la integral $\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{S}$, donde S es la superficie de la semibola $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1,\ z \geq 0$ y $\vec{F} = (x + 3y^5)\hat{\imath} + (y + 10xz)\hat{\jmath} + (z - xy)\hat{k}$ (orientar S según la normal exterior).

P16.- Sea la superficie definida por $z = \rho^2$ (en coordenadas cilíndricas) con $0 \leq \rho \leq R; \theta \in [0, 2\pi]$. Calcule el área y el flujo del campo vectorial $x^2\hat{\imath} + y^2\hat{\jmath} + z^2\hat{k}$ a través de S (orientada según la normal superior.

P17.- Considere el campo $\vec{F}(x,y,z) = (yz, xz, xy)$ y la región Ω definida por $x \geq 0$; $y \geq 0$; $z \in [0,b]$; $x^2 + y^2 \leq a^2$, donde $a > 0$ y $b > 0$ son constantes dadas.
a) Evalue las integrales de flujo sobre cada una de las cinco caras de la región. Haga un bosquejo y considere la orientación exterior.
b) Interprete físicamente los cinco flujos calculados, así como el flujo total a través de la superficie Ω.

P18.- Sea S una superficie suave y $\vec{p}$ un punto tal que toda recta que pasa por $\vec{p}$ corta S en a lo más un punto. Sea Ω la unión de todas las semirectas que parten de $\vec{p}$ y pasan por S y sea ε_a la intersección de Ω con la esfera (superficie esférica) de centro $\vec{p}$ y radio a. Demuestre que:

$$s = \frac{\text{área de } \varepsilon_a}{a^2} = \iint\limits_S \frac{(\vec{r}-\vec{p})\cdot\hat{n}}{\|\vec{r}-\vec{p}\|^3} dA.$$



Nota: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a $\vec{p}$.

P19.- Sea $\vec{F} : I\!R^3 \to I\!R^3$ un campo de clase C^1 tal que

$$\|\vec{F}(\vec{r})\| \leq \frac{1}{\|\vec{r}\|^a + 1} \quad \forall \vec{r} \in I\!R^3.$$

con $a > 2$. Muestre que $\int_{I\!R^3} \operatorname{div}(\vec{F}) = 0$.

P20.- Si $\vec{F} = (y+z, z+x, x+y)$ y S es la superficie del cubo limitado por $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$. Calcular $\iint S\vec{F}\cdot d\vec{S}$ con S orientado según la normal exterior.