

Profs. FELIPE ALVAREZ  
ROBERTO COMINETTI

## Matemáticas Aplicadas Guía # 4: Variable Compleja

**P1.-** (a) Sea  $f : \Omega \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{R}$ . Pruebe que si  $f$  es diferenciable en  $z_0 \in \Omega$  (en el sentido complejo) entonces  $f'(z_0) = 0$ .

(b) Sea  $\Omega \subset \mathcal{C}$  un abierto conexo por caminos. Pruebe que:

(i) Si  $f' \equiv 0$  en  $\Omega$  entonces  $f$  es constante en  $\Omega$ .

(ii) Si  $|f|$  es constante en  $\Omega$  entonces  $f$  también es constante. Ind.: Considere  $|f|^2$  y pruebe que  $f' \equiv 0$ .

**P2.-** (i) Sean  $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ . Pruebe que si  $u + iv$  y  $v + iu$  son holomorfas en  $\Omega$  como subconjunto de  $\mathcal{C}$ , entonces  $u + iv$  es constante.

(ii) Sea  $z_0 \in \mathcal{C}$  y definamos  $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$ ,  $z \in \mathcal{C}$ . Pruebe que  $f$  es diferenciable sólo en  $z_0$ .

**P3.-** Dada una función  $f = u + iv$ , se define el laplaciano de  $f$  por  $\Delta f = \Delta u + i\Delta v$ , y si  $\Delta f = 0$  en  $\Omega$  entonces se dice que  $f$  es armónica en  $\Omega$ . Pruebe que  $f \in H(\Omega)$  si y sólo si  $f(z)$  y  $zf(z)$  son armónicas en  $\Omega$ .

**P4.-** Definamos los operadores diferenciales  $\frac{\partial}{\partial z}$  y  $\frac{\partial}{\partial \bar{z}}$  por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} - i \frac{\partial}{\partial y} \right), \quad \frac{\partial}{\partial \bar{z}} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial}{\partial x} + i \frac{\partial}{\partial y} \right).$$

(i) Pruebe que  $f = u + iv$  satisface las ecuaciones de Cauchy-Riemann si y sólo si  $\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} = 0$ .

(ii) Si  $f \in H(\Omega)$ , muestre que  $\forall z \in \Omega$ ,  $f'(z) = \frac{\partial f}{\partial z}(z)$ .

(iii) ¿ A qué corresponde  $\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial \bar{z}} = 0$  ? Deduzca que toda función holomorfa es armónica.

**P5.-** Sea  $f : \Omega \subset \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{C}$ . Supongamos que en coordenadas cartesianas  $z = x + iy$ ,  $f(z) = \hat{u}(x, y) + i\hat{v}(x, y)$ , y que en coordenadas polares  $z = re^{i\theta}$ ,  $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$  con  $u$  y  $v$  diferenciables. Verifique que  $u(r, \theta) = \hat{u}(r \cos \theta, r \sin \theta)$  y  $v(r, \theta) = \hat{v}(r \cos \theta, r \sin \theta)$ , y pruebe que  $f$  es holomorfa en  $\Omega$  si y sólo si

$$\begin{cases} \frac{1}{r} \frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

**P6.-** (i) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando  $|z| = 1$ :

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

(ii) Si  $\sum c_k(z - z_0)^k$  tiene radio de convergencia  $\rho > 0$ . ¿Cuál es el radio de convergencia de las siguientes series de potencias ?

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k$$

**P7.-** Pruebe que:

(i)  $\sin(iz) = i \sinh(z)$ ,  $\sinh(iz) = i \sin(z)$ ,  $\cos(iz) = \cosh(z)$ ,  $\cosh(iz) = \cos(z)$ .

(ii)  $\sin(z) = \sin(\bar{z})$ ,  $\cos(z) = \cos(\bar{z})$ .

(iii)  $\lim_{y \rightarrow \infty} e^{-y} \sin(x + iy) = \frac{1}{2}[\sin x + i \cos x]$ .

(iv)  $\lim_{y \rightarrow \infty} \tan(x + iy) = i$ .

**P8.-** Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0, z_0]} \operatorname{Re}(z) dz, \quad \int_{|z|=1} \operatorname{Im}(z) dz, \quad \int_{|z|=2} \frac{dz}{z^2 + 1}, \quad \int_{|z|=1} \bar{z}^n dz$$

**P9.-** Pruebe que la función  $z \rightarrow z \log(z)$  tiene una primitiva en  $\mathcal{D} \setminus \mathbb{R}_-$ , y calcule el valor de la integral

$$\int_{[0, i]} z \log(z) dz$$

**P10.-** Pruebe que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3 + 1} dz = 0, \quad \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{[-R, -R+i]} \frac{z^2 \exp(z)}{z + 1} dz = 0$$

**P11.-** Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2} \cos(2bx) dx &= e^{-b^2} \int_0^\infty e^{-x^2} dx \\ \int_0^\infty e^{-x^2} \sin(2bx) dx &= e^{-b^2} \int_0^b e^{x^2} dx \end{aligned}$$

Ind.: Integre  $f(z) = \exp(-z^2)$  en un contorno rectangular adecuado.

**P12.-** (i) Pruebe que para  $b \in ]-1, 1[$  se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2 x^2} dx = \frac{\pi}{2}$$

Ind.: Integre  $f(z) = \frac{1}{1+z^2}$  en un contorno rectangular adecuado.

(ii) Si además  $b \neq 0$ , pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1-b^2+x^2)^2+4b^2x^2} dx = \frac{1}{4b} \ln \frac{1+b}{1-b}$$

**P13.-** Pruebe que

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2} \operatorname{Im}(e^{-2ix} p(x+i)) dx = 0$$

para cualquier polinomio  $p(z)$  con coeficientes reales. Ind.: Considere  $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$ .

**P14.-** Pruebe que si  $f \in H(D(z_0, R))$  entonces para todo  $r \in ]0, R[$  se tiene

$$f(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{i\theta}) d\theta.$$

Deduzca que  $\int_0^{2\pi} \log(1+re^{i\theta}) d\theta = 0$  para  $0 < r < 1$ , y por lo tanto  $\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x) dx = -\frac{\pi}{2} \ln 2$ .

**P15.-** (a) Transforme la integral  $\int_0^{2\pi} f(\cos \theta) d\theta$  en una de la forma  $\int_{|z|=1} g(z) dz$  y

muestre que  $\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + \cos \theta} = \frac{2\pi}{(a^2 - 1)^{1/2}}$ ,  $a > 1$ .

(b) Utilizando una transformación similar a (a), pruebe que:

$$(i) \int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1 - 2a \cos 2\theta + a^2} d\theta = \pi \frac{1 - a + a^2}{1 - a}, \quad 0 < a < 1.$$

$$(ii) \int_0^{2\pi} e^{2 \cos \theta} d\theta = 2\pi \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n!)^2}. \quad (\text{Nota: } \exp(1/z) = \sum_{k=0}^{\infty} 1/(k!z^k), \forall z \neq 0).$$

**P16.-** Pruebe que:

$$(i) \int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$$

$$(ii) \int_0^\infty \frac{x \sin(x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2} e^{-a}, \quad \text{con } a > 0.$$

$$(iii) \int_0^\infty \frac{\cos(\lambda x)}{x^2 + a^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-\lambda a}, \quad \text{donde } \lambda \in \mathbb{R} \text{ y } a > 0.$$

$$(iv) \int_0^\infty \frac{\ln x}{(1+x^2)^{n+1}} dx = -n \frac{\pi}{4}, \quad \text{para } n = 0 \text{ y } n = 1 \text{ (considere ambos casos separadamente)}.$$

$$(v) \int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2 + a^2)} dx = \frac{\pi}{2a^2} (1 - e^{-a}), \quad a > 0$$