DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Profs. FELIPE ALVAREZ
ROBERTO COMINETTI

Matemáticas Aplicadas
Guía # 5: Ecuaciones en derivadas parciales

1. Sea $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, tal que $(x,t) \mapsto u(x,t)$ y suponga que $u(x,t)$ denota el desplazamiento vertical de una cuerda de largo L que vibra en el punto x en el instante t.

   (a) i. De una interpretación física o geométrica, según corresponda, de las siguientes funciones:

   $$\frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) \quad \frac{\partial u}{\partial x}(x,t)$$

   ii. Sea $u(x,t) = 2\sin(2x)\cos(2\pi t)$ el desplazamiento de una cuerda vibrante estirada, entre $x = 0$ y $x = L = \pi$ ¿Cuál es la forma inicial de la cuerda? ¿Cuál es la velocidad del punto $x = \pi/2$ de la cuerda en $t = 0,75$? ¿Cuál es la pendiente de la cuerda en $x = \pi/2$, $t = 3$? ¿Qué sucede con los extremos de la cuerda?

   iii. Mostrar que si $u(x,t) = 2\sin(2x)\cos(2\pi t)$ entonces

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = \pi^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

   (b) Considere la ecuación en derivadas parciales que gobierna el movimiento de una cuerda vibrante unidimensional:

   $$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t)$$

   y sean $\varphi, \psi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones dos veces diferenciables

   i. Mostrar que $u(x,t) = \varphi(x+ct) + \psi(x-ct)$ es solución de la ecuación de ondas.

   ii. Encuentre las funciones φ y ψ en el caso de la parte (a)iii.
   Indicación: Recuerde que $\sin\alpha + \sin\beta = 2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$

   iii. Sea $\eta : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $u(x,0) = \eta(x)$. Si además $\frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0$, muestre que:

   $$u(x,t) = \frac{\eta(x+ct) + \eta(x-ct)}{2}$$

Indicación: plantee las condiciones

$$\begin{aligned} u(x,0) &= \eta(x) \\ \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) &= 0 \end{aligned}$$

obteniendo así un sistema para φ y ψ.

2. Muestre que las funciones $u = x^2 - y^2$, $u = e^x \cos y$, $u = \ln(x^2 + y^2)$ son soluciones de

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

3. Calcule la serie de Fourier en $-\pi < x < \pi$ para
(a) $f(x) = e^x$
(b) $f(x) = 1$ si $-\pi < x < 0$ y $f(x) = 2$ si $0 < x < \pi$
indicando donde ella es igual a f.

4. (a) Calcule la serie de Fourier de $f(x) = |\sin x|$ en $[-\pi, \pi]$. Explique por qué la serie coincide con f en todo $\mathbb{R}$. Pruebe que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} \quad \text{y que} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4n^2 - 1} = \frac{1}{2} - \frac{\pi}{4}$$

(b) Encuentre la serie de Fourier de $f(x) = |x|$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$. Explique para cuales x en ese intervalo se tiene la igualdad de la serie con f. Muestre que:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$$

5. Aplicando la fórmula $e^{i\theta} = \cos\theta + i \sin\theta$, demostrar que

$$\cos nx = \frac{1}{2}(e^{inx} + e^{-inx}), \quad \sin nx = \frac{1}{2i}(e^{inx} - e^{-inx})$$

y que la serie de Fourier

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

puede escribirse de la forma

$$f(x) = c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (c_n e^{inx} + k_n e^{-inx})$$

donde $c_0 = a_0, c_n = \frac{a_n - ib_n}{2}, k_n = \frac{a_n + ib_n}{2}, n \in \mathbb{N}$

6. Encontrar soluciones $u(x, y)$ de las siguientes ecuaciones separando variables.

   (a) $\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} = 0$

   (b) $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$

   (c) $\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} - u = 0$

   (d) $x^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} + 3y^2 x = 0$

7. Encontrar las soluciones elementales en variables separadas de

$$u_t = a u_{xx} - bu, \quad 0 < x < l, \ t > 0$$

   con condiciones de borde Dirichlet homogéneo (a, b constantes positivas conocidas).

8. Los cuatro lados de una placa cuadrada perfectamente delgada de lado π se mantienen a temperatura 0 y completamente aislados. Queremos describir la evolución de la temperatura u de la placa si inicialmente está dada por una función $f(x, y)$ que se supone conocida.

   (a) Determine el problema diferencial que modela esta situación física explicando condiciones iniciales y de borde.

   (b) Aplicando el método de separación de variables a la ecuación diferencial en derivadas parciales de la parte anterior, pruebe que la temperatura en la placa está dada por la siguiente expresión

$$u(x, y, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{m=1}^{+\infty} B_{m,n} \sin(mx) \sin(ny) e^{-(m^2+n^2)t} \tag{1}$$

   (c) Pruebe que las constantes en (1) se determinan mediante

$$B_{k,l} = \frac{4}{\pi^2} \int_0^{\pi}\int_0^{\pi} f(x, y) \sin(kx) \sin(ly) dx dy \quad \forall k, l \geq 1$$

9. Considere un cilindro infinito descrito en coordenadas cilíndricas por $z \in \mathbb{R}$, $r \in [0,1]$, $\theta \in]0, 2\pi]$.
Denotemos por $u = u(r,\theta)$ a la temperatura del cilindro, que suponemos independiente de z. La siguiente ecuación (en coordenadas cilíndricas) rige a la temperatura u en estado estacionario:

$$(EC) \quad r^2 u_{rr}(r,\theta) + ru(r,\theta) + u_{\theta\theta}(r,\theta) = 0 \quad r < 1,\ \theta \in]-\pi, \pi]$$

Suponga que la temperatura en la superficie del cilindro es conocida:

$$(CB) \quad u(1,\theta) = f(\theta) \quad \theta \in]-\pi, \pi[$$

Postule una solución elemental del tipo $U(r,\theta) = R(r)\Theta(\theta)$ y resuelva la ecuación. Puede suponer que se tiene continuidad de la solución y de sus derivadas en todo el cilindro, y por lo tanto se debe tener $\Theta(-\pi) = \Theta(\pi)$ y $\Theta'(-\pi) = \Theta'(\pi)$.

10. Encontrar la solución de la ecuación de onda $u_{tt} = cu_{xx}$ con $c > 0$, correspondiente a la desviación inicial triangular (con velocidad inicial cero). Suponga condiciones de borde Newmann homogéneo.

$$f(x) \begin{cases} \frac{2k}{l}x & 0 < x < \frac{l}{2} \\ \frac{2k}{l}(l-x) & \frac{l}{2} < x < l \end{cases}$$

11. Las ecuaciones de una cuerda infinita están regidas por la ecuación de onda unidimensional:

$$(EO) \quad y_{tt}(t,x) = a^2 y_{xx}(t,x) \quad t \in \mathbb{R},\ x \in]0, +\infty[$$

donde $y(t,x)$ es el desplazamiento de la cuerda en la posición x en el instante t, con respecto al eje $y = 0$, y $a > 0$ es una constante.
(a) Suponga que en el instante inicial $t = 0$ la cuerda está tensionada de manera que $y(0,x) = f(x)$ para $x \in \mathbb{R}$ y que es 'soltada' desde esa posición, es decir $y_t(0,x) = 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Encuentre $y(t,x)$.
(b) Suponga ahora que la cuerda es semi-infinita, es decir (EO) vale para $x \in [0, \infty[$. Considere las mismas condiciones iniciales para $0 \leq x$ y suponga que en todo momento el extremo $x = 0$ de la cuerda permanece fijo en el origen. Encuentre $y(t,x)$.
Indicación: Considere la extensión impar de f a todo $\mathbb{R}$.

12. Si $v(x,y)$ verifica $\Delta v = 0$ en el cuadrante $x > 0$, $y > 0$ y $v(0,y) = 0$, $v(x,0) = f(x)$. Para esos x, y obtenga la solución

$$v(x,y) = \frac{y}{\pi} \int_0^\infty f(\xi) \left[\frac{1}{y^2 + (\xi - x)^2} - \frac{1}{y^2 - (\xi + x)^2} \right] d\xi$$

para $x \geq 0$, $y > 0$. Si $f(x) = 1$, muestre que entonces $v(x,y) = \frac{2}{\pi} \arctan \frac{x}{y}$.

13. Resuelva la ecuación de Laplace en un rectángulo

$$(L) \quad u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) = 0 \quad 0 < x < a,\ 0 < y < b$$

con condiciones de borde

$$\begin{array}{l} u(x,0) = u(x,b) = 0 \quad 0 < x < a \\ u(0,y) = 0 \quad 0 < y < b \\ u(a,y) = T = cste \quad 0 < y < b \end{array}$$

mediante separación de variables y serie de Fourier

14. Una cuerda tiene sus extremos fijos en $x = 0$ y $x = l$. Sobre ella actúa la resistencia del aire. La ecuación que rige las oscilaciones de la cuerda es en este caso:

$$u_{tt}(t,x) = a^2 u_{xx} - 2b u_t(t,x) \quad t \in \mathbb{R},\ 0 \leq x \leq l$$

donde $b > 0$ es una constante. Suponga que se satisfacen las condiciones de borde

$$(CB) \quad u(t,0) = u(t,l) = 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

y las condiciones iniciales

$$(CI) \quad u(0,x) = f(x) \quad u_t(0,x) = g(x)$$

Encuentre $u(t,x)$ utilizando separación de variables y serie de Fourier.
Indicacion: Suponga $b < \frac{\pi a}{l}$

15. Encuentre la solución al problema diferencial (en dos variables):

$$\Delta u = 0 \quad 0 \leq x < +\infty,\ 0 < y < 1$$

con condiciones de borde:

$$u_x(0,y) = u_y(x,0) = 0,\ u(x,1) = 1\ \forall x \in]0,1[,\ u(x,1) = 0\ \forall x \in]1,+\infty[$$

16. Resolver por Transformada de Fourier:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx} & x \in \mathbb{R},\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(x,0) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

17. (a) Pruebe que la transformada de Fourier de

$$f(x) = \frac{1}{1+x^2}$$

corresponde a la función

$$\hat{f}(s) = \pi e^{-|s|}$$

(b) Resolver el problema de la conducción del calor en una placa unidimensional infinita, modelado por el siguiente problema diferencial

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0 \quad x \in \mathbb{R},\ t > 0$$

con condición inicial

$$u(x,0) = \frac{1}{1+x^2}$$

y con $u(x,t)$ acotada.

18. Se desea determinar la evolución de temperatura $u(t,x)$ en una barra semi-infinita cuando hay transferencia de calor al medio circundante según el modelo

$$u_t = k u_{xx} - \gamma u \quad t > 0,\ 0 < x < +\infty$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica y $\gamma > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor. Suponga que la barra está aislada en $x = 0$, esto es

$$u_x(t,0) = 0 \qquad t > 0$$

y que la distribución inicial de temperaturas está dada por una función $f(x)$, es decir

$$u(0,t) = f(x), \qquad 0 < x < +\infty$$

Pruebe que u se puede expresar como $u(x,t) = [f(\cdot) * G(t,\cdot)](x)$ para una función $G(t,x)$ la cual se pide determinar usando el método de la transformada de Fourier.
Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $x \in \mathbb{R}$.

19. Considere la cinta delgada semi-infinita inmersa en un medio a temperatura cero. Queremos determinar el campo estacionario de temperaturas $u(x,y)$ en la cinta cuando la transferencia de calor tiene lugar a través de su superficie. Bajo ciertos supuestos, se sabe que en estas condiciones $u(x,y)$ satisface la ecuación diferencial

$$u_{xx}(x,y) + u_{yy}(x,y) - hu(x,y) = 0 \qquad 0 < x < +\infty,\ 0 < y < 1$$

donde h es una constante positiva llamada coeficiente de transferencia de calor superficial. Resuelva este problema diferencial con condiciones de borde dadas por

$$u_x(0,y) = 0, \qquad 0 < y < 1$$

y además

$$u(x,0) = 0, \quad u(x,1) = f(x), \qquad 0 < x < +\infty$$

donde

$$f(x) = \begin{cases} 1 & 0 < x < c \\ 0 & x \geq c \end{cases}$$

Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $x \in \mathbb{R}$.