DEPARTAMENTO DE INGENIERIA MATEMATICA
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS UNIVERSIDAD DE CHILE

Prof. FELIPE ALVAREZ DAZIANO

Matemáticas Aplicadas - Guía de problemas
Variable Compleja

P1.- Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{R}$. Pruebe que si f es diferenciable en $z_0 \in \Omega$ (en el sentido complejo) entonces $f'(z_0) = 0$.

P2.- Sean $u, v : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω (aquí consideramos $\Omega \subset \mathbb{C}$), entonces $u + iv$ es constante.

P3.- Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

P4.- Definamos los operadores diferenciales $\dfrac{\partial}{\partial z}$ y $\dfrac{\partial}{\partial \overline{z}}$ por

$$\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}, \qquad \frac{\partial}{\partial \overline{z}} = \frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}.$$

(i) Pruebe que si $f = u + iv$ entonces las ecuaciones de Cauchy-Riemann corresponden a $\dfrac{\partial f}{\partial \overline{z}} = 0$.

(ii) Si $f \in H(\Omega)$, muestre que $f'(z_0) = \dfrac{\partial f}{\partial z}(z_0)$.

(iii) ¿ A qué corresponde $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial \overline{z}} = 0$?

P5.- Una función $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ con $f = u + iv$ se dice armónica compleja en Ω si tanto u como v son armónicas en Ω (i.e. $\Delta u = \Delta v = 0$). Pruebe que si $f(z)$ y $zf(z)$ son armónicas complejas en Ω entonces $f \in H(\Omega)$.

P6.- Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \widehat{u}(x, y) + i\widehat{v}(x, y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r, \theta) + iv(r, \theta)$. Verifique que $u(r, \theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r, \theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, y pruebe que f es diferenciable en Ω (i.e. $f \in H(\Omega)$) si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & = & \dfrac{\partial u}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

P7.- (i) Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}$$

(ii) Si $\sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$ ¿ Cuál es el radio de convergencia de las siguientes series de potencias ?

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k$$

Recuerde que $\limsup\limits_{k \to \infty} a_k$ =mayor de los puntos de acumulación de $\{a_k\}$.

P8.- Pruebe que:
(i) $\sin(iz) = i\sinh(z)$, $\sinh(iz) = i\sin(z)$, $\cos(iz) = \cosh(z)$, $\cosh(iz) = \cos(z)$.
(ii) $\overline{\sin(z)} = \sin(\overline{z})$, $\overline{\cos(z)} = \cos(\overline{z})$.
(iii) $\lim\limits_{y \to \infty} e^{-y}\sin(x + iy) = \frac{1}{2}[\sin x + i\cos x]$.
(iv) $\lim\limits_{y \to \infty} \tan(x + iy) = i$.

P9.- Calcule directamente el valor de las siguientes integrales:

$$\int_{[0,z_0]} \mathrm{Re}(z)dz, \quad \int_{|z|=1} \mathrm{Im}(z)dz, \quad \int_{|z|=1} \frac{dz}{z^2+1}, \quad \int_{|z|=1} \overline{z}^n dz$$

P10.- Pruebe que

$$\lim_{R \to \infty} \int_{|z|=R} \frac{z}{z^3+1}dz = 0, \qquad \lim_{R \to \infty} \int_{[-R,-R+i]} \frac{z^2\exp(z)}{z+1}dz = 0$$

P11.- (i) Pruebe que para $b \in]-1,1[$ se tiene

$$\int_0^\infty \frac{1 - b^2 + x^2}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2}dx = \frac{\pi}{2}$$

Ind.: Integre $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$ en un contorno rectangular adecuado.
(ii) Si además $b \neq 0$, pruebe que

$$\int_0^\infty \frac{x}{(1 - b^2 + x^2)^2 + 4b^2x^2}dx = \frac{1}{4b}\ln\frac{1+b}{1-b}$$

P12.- Pruebe que
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2}\,\mathrm{Im}(e^{-2ix}p(x+i))dx = 0$$
para cualquier polinomio p con coeficientes reales. Ind.: Considere $f(z) = \exp(-z^2)p(z)$.

P13.- Pruebe que
$$\int_0^{2\pi} \ln(1+re^{i\theta})d\theta = 0, \quad (0 < r < 1)$$
y deduzca que
$$\int_0^{\pi/2} \ln(\sin x)dx = -\frac{\pi}{2}\ln 2.$$

P14.- Dado $a \in \mathbb{R}$, definamos $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}$ mediante $f(z) = \exp\left(az + \frac{a}{z}\right)$. Pruebe que $f(z) = c_0 + \sum_{k=1}^{\infty} c_k(z^k + z^{-k}), \quad z \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, donde
$$c_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} e^{2a\cos\theta}\cos(n\theta)d\theta.$$

P15.- Transforme la integral $\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta)d\theta$ en una de la forma $\int_{|z|=1} g(z)dz$ y muestre que:

(i) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a+\cos\theta} = \frac{2\pi}{(a^2-1)^{1/2}}, \quad a > 1.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{2\pi} \frac{\cos^2 3\theta}{1-2a\cos 2\theta + a^2}d\theta = \pi\frac{1-a+a^2}{1-a}, \quad 0 < a < 1.$

P16.- Pruebe que:

(i) $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{1+x^6} = \frac{2\pi}{3}.$

(ii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\cos(\lambda x)}{x^2+a^2}dx = \frac{\pi}{2a}e^{-\lambda a}$, donde $\lambda \in \mathbb{R}$ y $a > 0$.

(iii) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}dx = \frac{\pi}{2}.$

(iv) $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+a^2)}dx = \frac{\pi}{2a^2}(1-e^{-a}), \quad a > 0$