Guía de Ejercicios 1. **MA26B Matemáticas Aplicadas**. Semestre 2005-1

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Curvas, Superficies y Divergencia.

P1. Parametrizar la curva plana cuyos puntos satisfacen lo siguiente : el producto de las distancias a dos focos en la abscisa $(A, 0)$ y $(-A, 0)$ es constante e igual a $B > 0$. (Lemniscata)

P2. (a) Sea Γ la curva descrita por un punto P de una circunferencia de radio R_0, la cual rueda sin resbalar sobre otra circunferencia de radio mayor $R > R_0$. Parametrice la curva resultante y determine la función de longitud de arco. Estudie la curvatura y la torsión donde tenga sentido.

(b) Parametrizar la circunferencia que pasa por los puntos $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$. Indicación : Note que el vector $(1, 1, 1)$ es normal al plano que contiene a la circunferencia.

P3. Una partícula se mueve sobre el manto del cilindro de ecuación $x^2 + y^2 = 1$ de forma tal que $z = z(\theta)$ es solución de la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{d^2z}{d\theta^2} &= z \\ z(0) = 1 \quad &, \quad \frac{dz}{d\theta}(0) = 0 \end{aligned}$$

donde (r, θ, z) son las coordenadas cilíndricas.

(a) Encuentre una parametrización de la curva γ descrita por la partícula (use a θ como parámetro).

(b) Calcule la longitud de γ si $\theta \in [0, 2\pi]$.

(c) Calcule el vector tangente, el normal y el binormal asociado a γ, así como su curvatura y su torsión.

P4. Calcular la masa del alambre que sigue la intersección de la esfera $x^2+y^2+z^2 = 1$ con el plano $x+y+z = 0$ y cuya densidad de masa está dada por la función $\rho(x, y, z) = x^2$.

P5. Dada una función continua y no nula $g : [0, \ell_0] \to \mathbb{R}$, pruebe que existe una curva plana $\Gamma \subset \mathbb{R}$ de longitud ℓ_0 tal que su curvatura está dada por $|g|$. Indicación : Defina

$$\theta(s) = \int_0^s g(u)du, \quad x(s) = \int_0^s \cos\theta(u)du, \quad y(s) = \int_0^s \sin\theta(u)du$$

y estudie $\vec{r}(s) = x(s)\hat{\imath} + y(s)\hat{\jmath}$.

P6. Considere una curva $\Gamma \subset \mathbb{R}^3$ con la siguiente propiedad : existe un punto $\vec{P}_0$ por el cual pasan todas las rectas normales a Γ (note que todo arco de circunferencia satisface esta propiedad). Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ una parametrización de Γ en longitud de arco.

(a) Justifique la existencia de una función escalar $\varphi : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}$ tal que

$$\vec{P}_0 = \vec{r}(s) + \varphi(s)\vec{N}(s)$$

donde $\vec{N}(s)$ denota el vector normal.

(b) Demuestre que se cumplen las siguientes igualdades

$$\begin{aligned} 1 - \kappa(s)\varphi(s) &= 0 \\ \varphi'(s) &= 0 \\ \tau(s)\varphi(s) &= 0 \end{aligned}$$

donde $\kappa(s), \tau(s)$ son la curvatura y la torsión de Γ, respectivamente.

(c) Concluya que Γ es una curva plana.

(d) Demuestre finalmente que Γ es un arco de circunferencia.

P7. **Espirales de MacLaurin.** Corresponden a una familia de curvas en el plano que al ser descrita en coordenadas polares las variables ρ y θ satisfacen la relación

$$\rho(\theta) = a(\sin(n\theta))^{\frac{1}{n}}$$

donde $a > 0$ y $n \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ corresponde al orden de la espiral. Pruebe que la curvatura de una espiral de MacLaurin de orden n es:

$$k(\theta) = \frac{n+1}{a}(\sin(n\theta))^{\frac{n-1}{n}}$$

P8. Sea el campo vectorial $\vec{F}(x, y) = (2x+y^2)\hat{\imath}+(3y-4x)\hat{\jmath}$. Calcular la integral de trabajo $\int_\gamma \vec{F} \cdot d\vec{\sigma}$ donde γ es la *lenteja* formada por las ecuaciones $x = y^2$; $y = x^2$; $x, y \geq 0$ recorrida en sentido anti-horario.

P9. Considere la curva plana Γ descrita por la siguiente ecuación en coordenadas polares

$$\rho = a(1 - \cos(\theta)) \quad a > 0,\ \theta \in [0, 2\pi]$$

(i) Encuentre una parametrización para Γ. Gráfique esta parametrización detalladamente y encuentre sus posibles irregularidades.

(ii) Calcule el largo de Γ.

(iii) Calcule el trabajo efectuado por el campo vectorial

$$\vec{F} = \left(2xy^2\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2x}{x^2+y^2+1}, 2x^2y\cos\left(x^2y^2\right) + \frac{2y}{x^2+y^2+1}\right)$$

al dar una vuelta completa a la curva en el sentido anti-horario.

P10. Una partícula se mueve a lo largo de una trayectoria γ sobre el manto del paraboloide invertido de ecuación $x^2 + y^2 = -z$ de manera que la altura z y el ángulo θ en cilíndricas cumplen la relación $z(\theta) = -e^{-2\theta}$, $\theta \geq 0$. Considere el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \Big(\frac{2xy}{x^2+y^2} + x\sin(x^2), \frac{-2xy}{x^2+y^2} - y^2\cos(y^3), e^z\Big)$$

Calcule el trabajo del campo a través de γ. HINT: $\int_0^\infty e^{-x}\cos^3(x)dx = \frac{2}{5}$

P11. Calcule el área de la intersección entre $x^2 + y^2 = a^2$ y $x^2 + z^2 = a^2$ donde a es una constante.

P12. Considere el paraboloide de ecuación $x^2 + y^2 + z = 4R^2$ con $R > 0$ y el cilindro $x^2 + y^2 = 2Ry$. Calcule el área de la superficie definida por la porción del cilindro que queda fuera del paraboloide.

P13. Sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 \;=\; \frac{z^2}{h^2}\;,\; h > 0$$

de forma tal que la altura $z = z\left(\theta\right)$ satisface la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} \frac{dz}{d\theta} &= z \\ z\left(0\right) &= h \end{aligned}$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

i) Bosqueje la curva y demuestre que $\tau/k = h\sqrt{2}$, donde τ y k corresponden a la torsión y curvatura de Γ, respectivamente.

ii) Considere el campo vectorial $\vec{F}\left(x,y,z\right) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, -\frac{1}{z^2}\right)$. Sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}, \right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

P14. Sea Γ una curva suave y regular. Sea $\vec{r}(s) : [0, \ell(\Gamma)] \to \mathbb{R}^3$ su parametrización en longitud de arco. Sea S la superficie definida por

$$\begin{aligned} \vec{\phi} \quad &: \quad [0,\ell(\Gamma)] \times [0, 2\pi] \to \mathbb{R}^3 \\ \vec{\phi}(s,\theta) \quad &= \quad \vec{r}(s) + a\cos(\theta)\vec{B}(s) - a\,\text{sen}(\theta)\vec{N}(s) \end{aligned}$$

donde $a > 0$ constante y $\vec{N}(s), \vec{B}(s)$ denota el vector normal y binormal de Γ, respectivamente. Suponga que $a\kappa(s) < 1$, donde $\kappa(s)$ es la curvatura de Γ en longitud de arco. Demuestre que

$$\iint_S dA = 2\pi a \ell(\Gamma)$$

P15. Calcular la masa de una superficie esférica S de radio R tal que en cada punto $(x,y,z) \in S$, cuando la densidad de masa es igual a la distancia de (x,y,z) a un punto fijo (x_0, y_0, z_0).

P16. (a) Calcule el flujo del campo $\vec{F}(x,y,z) = (x - y\cos z, y - x, z - e^y)$ a través de la superficie del toro de eje de simetría z, centrado en el origen y de radios R_0 y r_0 ($R_0 > r_0$).

(b) Calcular la integral de superficie $\iint\limits_{\Sigma} \nabla\phi \cdot d\vec{S}$ si Σ es el hemisferio superior del casquete elipsoidal $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ orientado según la normal interior y ϕ es el campo escalar $\phi(x,y,z) = (x+1)^2 + 2(y-1)^2 + z^2$.

P17. Calcule el flujo definido por el campo

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(e^y \sin y + xy^2 z, e^x \cos zx^2 yz, \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)$$

a través de la superficie lateral del cilindro de radio 1 que se encuentra entre los planos $z = -1$ y $z = 1$. HINT: Calcule el flujo total que sale del cilindro (incluyendo las tapas y usando el teorema de la divergencia). Calcule el flujo a través de las tapas directamente.

P18. Considere el volumen $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ definido por las inecuaciones:

$$\begin{cases} |z| \leq 2 - x^2 - y^2 \\ (x-1)^2 + y^2 \leq 1 \end{cases}$$

(a) Bosqueje la región Ω.

(b) Use el teorema de la divergencia para calcular el flujo del campo $\vec{F} = \rho\hat{\rho}$ (en coordenadas cilíndricas) a través de $\partial\Omega$ orientada según la normal exterior.

P19. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ un abierto acotado de frontera regular $\partial\Omega$, con $0 \in \Omega$. Sea $\vec{f} = \frac{1}{\rho^k}\hat{\rho}$ con $k \geq 2$ (en coordenadas cilíndricas), definido para $\rho > 0$. Demuestre que

$$\frac{1}{R_0^{k-2}} \leq \iint\limits_{\partial\Omega} \vec{f} \cdot d\vec{S} \leq \frac{1}{R_1^{k-2}}$$

donde

$$R_1 = \inf_{\vec{r} \in \Omega^c} ||\,\vec{r}\,|| \quad \text{y} \quad R_0 = \sup_{\vec{r} \in \Omega} ||\,\vec{r}\,||$$

HINT: Calcule $\iint\limits_{S(0,R)} \vec{f} \cdot d\vec{S}$ para $R > 0$ y considere los casos $R < R_1$ y $R > R_0$. Se entiende a $S(0,R)$ como la esfera de centro 0 y radio R.

P20. El empuje total que ejerce el agua sobre un objeto de superficie S está dado por

$$G = \iint\limits_{S} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

con

$$\vec{F}(x,y,z) = \begin{cases} (0, 0, \rho g(h - z)) & \text{si } z \leq h \\ (0,0,0) & \text{si } z > h \end{cases}$$

donde g es el módulo de la aceleración de gravedad, ρ es la densidad del agua y h es la altura del nivel del agua. Demuestre que G es igual al peso del volumen de agua desplazado por el objeto.