Guía de Ejercicios 2. **MA26B Matemáticas Aplicadas**. Semestre 2005-1

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Teorema de Stokes y funciones de variable compleja.

P1. Pruebe las siguientes identidades:
(i) $\mathrm{rot}(\nabla\varphi) = 0$.
(ii) $\mathrm{div}(\mathrm{rot}(\vec{F})) = 0$.
(iii) $\mathrm{div}(\vec{F} \times \vec{G}) = \vec{G} \cdot \mathrm{rot}(\vec{F}) - \vec{F} \cdot \mathrm{rot}(\vec{G})$.
(iv) $\mathrm{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0$.
(v) $\mathrm{rot}(\varphi\vec{F}) = \varphi\mathrm{rot}(\vec{F}) + \nabla\varphi \times \vec{F}$.

P2. Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto no vacío, $\vec{F} : \Omega \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial y $g : \Omega \to \mathbb{R}$ un campo escalar, ambos de clase C^1.

Pruebe que si $S \cup \partial S \subset \Omega$, donde S es una superficie regular a trozos, entonces se tiene la fórmula de integración por partes

$$\iint_S g \ \mathrm{rot}(\vec{F}) \cdot d\vec{S} = \oint_{\partial S} g\, \vec{F} \cdot d\vec{r} - \iint_S \nabla g \times \vec{F} \cdot d\vec{S},$$

siempre que las orientaciones de S y ∂S sean las adecuadas (explique).

Indicación: utilice la identidad dada en la pregunta 1 parte (v).

P3. Utilice el teorema de Green en el plano para calcular el área de la región encerrada por la hipocicloide $x^{2/3} + y^{2/3} = 4$.

Indicación: considere la curva plana parametrizada por $x = 8\cos^3\theta$ y $y = 8\,\mathrm{sen}^3\,\theta$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

P4. (i) Dados dos campos escalares $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ de clase C^2, pruebe que para toda curva simple cerrada y regular por trozos Γ se tiene

$$\oint_\Gamma f\nabla g \cdot d\vec{r} + \oint_\Gamma g\nabla f \cdot d\vec{r} = 0.$$

(ii) Sean $\phi, \psi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dos funciones de clase $\mathcal{C}^2$. Sea Σ una superficie orientable y $C = \partial\Sigma$ su borde geométrico, ambos orientados consistentemente. Muestre que

$$\iint\limits_\Sigma \nabla\phi \times \nabla\psi \cdot d\vec{S} = \int\limits_C \phi\nabla\psi \cdot d\vec{\ell}.$$

(iii) Sea Σ el hemisferio superior de la esfera $x^2 + y^2 + (z-1)^2 = 1$ y sea el campo vectorial definido por

$$\vec{F}(x, y, z) = (z\,\mathrm{sen}(x) - y^3, z\cos(y) + x^3, \cos(xy)).$$

Calcule

$$\iint\limits_\Sigma \vec{\nabla} \times \vec{F} \cdot d\vec{S}.$$

P5. Sea $\vec{r} = (x, y, z)$, $r = ||\vec{r}||$ y $\Sigma^+ = \partial\{\vec{r} \in \mathbb{R}^3 / a \leq r \leq b\}$ orientada hacia el exterior. Sean $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ y $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ambas de clase $\mathcal{C}^1$ tales que:

$$\vec{F}(\vec{r}) = f(r^2)\vec{r}.$$

(i) Verificar que

$$r^2 \,\mathrm{div}\, \vec{F}(\vec{r}) = \frac{d}{dr}(r^3 f(r^2)).$$

(ii) Concluir que

$$\iint\limits_{\Sigma^+} \vec{F} \cdot d\vec{S} = 4\pi(b^3 f(b^2) - a^3 f(a^2)).$$

Con la misma notación, sea $\mathcal{C}^+$ una curva de extremos $O = (0,0,0)$ y $A = (0,0,a)$, regular por trozos, recorrida desde O hasta A.

(iii) Calcular $\operatorname{rot} \vec{F}(\vec{r})$.

(iv) Verificar que

$$\int\limits_{C^+} \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \frac{1}{2} \int\limits_0^a f(t) dt.$$

P6. (i) Sea $\vec{F} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial de clase $\mathcal{C}^1$. Demuestre que

$$\operatorname{rot} \vec{F}(a) \cdot \hat{n} = \lim_{r \to 0} \frac{1}{\pi r^2} \iint\limits_{\mathcal{C}_r} \vec{F} \cdot d\vec{S}$$

con $\mathcal{C}_r$ el círculo de radio r, centro en a, que vive en el plano de normal $\hat{n}$.

(ii) Use el resultado anterior para calcular $\operatorname{rot} \vec{F}(0)$ con $\vec{F}(x_1, x_2, x_3) = (0, 0, x_2)$ (use $\hat{n} = \vec{e}_i, i = 1, 2, 3$).

P7. Las ecuaciones de Euler de un fluido $\vec{v}$ en régimen estacionario y en presencia de un campo gravitacional vienen dadas por

$$\rho \nabla \vec{v} \cdot \vec{v} + \nabla p = -\rho g \widehat{k},$$

donde g es la aceleración de gravedad (constante).

(i) Demuestre la identidad vectorial

$$\nabla \vec{v} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} \nabla (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) - \vec{v} \times (\nabla \times \vec{v}).$$

(ii) Deduzca que para el caso de un flujo irrotacional e incompresible ($\rho \equiv$ constante) se satisface la ecuación de Bernoulli

$$\frac{1}{2} \rho (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) + p + \rho g z = \text{constante}.$$

(iii) Un estanque cilíndrico de radio R contiene agua hasta una altura $h > 0$. En el fondo del estanque se practica una abertura de radio $\varepsilon << R$. Suponiendo que el flujo es irrotacional, estacionario e incompresible, demuestre que la rapidez con que sale el líquido es aproximadamente $\sqrt{2gh}$. Justifique brevemente las aproximaciones que haga.

P8. Sea $u = u(x, y)$ una función de clase C^2 en $\mathbb{R}^2$. Pruebe que si u es *armónica*, i.e. $\Delta u = 0$, entonces u tiene una función armónica conjugada.

Indicación: verifique que el campo $\vec{F} = -\frac{\partial u}{\partial y} \widehat{\imath} + \frac{\partial u}{\partial x} \widehat{\jmath}$ es conservativo.

P9. Sea $\Gamma \subset \mathbb{C}$ un camino cerrado simple recorrido en sentido antihorario y que encierra una región $D \subseteq \mathbb{C}$. Pruebe que

$$Area(D) = \frac{1}{2i} \oint_{\Gamma} \overline{z} dz.$$

P10. Sean $\Omega \subset \mathbb{C}$ un abierto conexo por caminos y $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Pruebe que si $|f|$ es constante, entonces f también lo es. Diga por qué es importante que Ω sea conexo.

P11. Sean $u, v : \Omega \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Pruebe que si $u + iv$ y $v + iu$ son holomorfas en Ω como subconjunto de $\mathbb{C}$, entonces $u + iv$ es constante.

P12. Sea $z_0 \in \mathbb{C}$ y definamos $f(z) = (z - z_0)|z - z_0|$, $z \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es diferenciable sólo en z_0.

P13. Sea $f : \Omega \subset \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. Supongamos que en coordenadas cartesianas $z = x + iy$, $f(z) = \widehat{u}(x,y) + i\widehat{v}(x,y)$, y que en coordenadas polares $z = re^{i\theta}$, $f(z) = u(r,\theta) + iv(r,\theta)$ con u y v diferenciables. Verifique que $u(r,\theta) = \widehat{u}(r\cos\theta, r\sin\theta)$ y $v(r,\theta) = \widehat{v}(r\cos\theta, r\sin\theta)$, y pruebe que f es holomorfa en Ω si y sólo si

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial v}{\partial \theta} & = & \dfrac{\partial u}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial u}{\partial \theta} & = & -\dfrac{\partial v}{\partial r} \end{cases}$$

Estas se conocen como las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.

P14. Pruebe que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-x^2}\cos(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^\infty e^{-x^2}dx, \\ \int_0^\infty e^{-x^2}\sin(2bx)dx &= e^{-b^2}\int_0^b e^{x^2}dx. \end{aligned}$$

Indicación: Integre $f(z) = \exp(-z^2)$ en un contorno rectangular adecuado.

P15. (i) Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa. Dado $\theta_0 \in]0, 2\pi[$, pruebe que si

$$\lim_{R\to+\infty} R\int_0^{\theta_0} |f(Re^{i\theta})|d\theta = 0 \tag{1}$$

entonces se tiene

$$e^{i\theta_0}\int_0^\infty f(e^{i\theta_0}x)dx = \int_0^\infty f(x)dx.$$

(ii) Pruebe que $f(z) = \exp(-z^2)$ satisface (1) para todo $\theta_0 \in]0, \pi/4]$.

(iii) Sabiendo que $\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}dx = \sqrt{\pi}$, calcule el valor de las siguientes integrales impropias:

$$\int_0^\infty e^{-x^2}\cos(x^2)dx, \quad \int_0^\infty e^{-x^2}\operatorname{sen}(x^2)dx.$$

Indicación: $\operatorname{sen}(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$, $\cos(\frac{\pi}{8}) = \frac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}$.

P16. Calcule $\int_\gamma \frac{|z|}{|R-z|^2}|dz|$ donde γ es la circunferencia de radio r, $0 < r < R$, y centro el origen.

Indicación: Pruebe previamente que si $0 \le r < R$, se tiene:

$$\frac{1}{R^2 - 2rR\cos(t) + r^2} = \frac{1}{R^2 - r^2}\left(1 + 2\sum_{n=1}^\infty (\frac{r}{R})^n\cos(nt)\right)$$

y use que $\sum_{n=1}^\infty \rho^n$ converge a $\frac{\rho}{1-\rho}$ uniformemente en $|\rho| \le a$, para todo $0 < a < 1$.

P17. Usando la representación integral de $f^{(n)}(a)$ dada por la fórmula de Cauchy, pruebe que

$$\left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{x^n e^{xz}}{n!z^{n+1}}dz,$$

donde C es cualquier curva cerrada que encierra el origen. De aquí pruebe que

$$\sum_{n=0}^\infty \left(\frac{x^n}{n!}\right)^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{2x\cos\theta}d\theta.$$

P18. Una esfera de radio b contiene un núcleo de radio $a < b$ a temperatura $T_a < 0 < T_b$. El sector esférico definido por $a < r < b$ contiene hielo en la región Ω_h dada por $a < r < r_0$, y agua en la región Ω_l dada por $r_0 < r < b$. Sean k_h y k_l los coeficientes de conductividad térmica del hielo y del agua respectivamente.

(i) Sea $u = u(r)$ la temperatura en régimen estacionario dada en coordenadas esféricas. Dado que la ecuación del calor nos dice que

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\Delta u = 0,$$

donde k es la conductividad térmica del respectivo medio. Pruebe que $u(\cdot)$ satisface la ecuación

$$\frac{\partial}{\partial r}\left[r^2 \frac{\partial u}{\partial r}\right] = 0.$$

(ii) Encuentre las temperaturas $u_h(r)$ y $u_l(r)$ en las regiones Ω_h y Ω_l respectivamente.

(iii) Imponiendo que el flujo de calor que sale de Ω_h es igual al que entra en Ω_l, determine el valor de r_0 en función de T_a, T_b, a, b, k_h y k_l.

P19. Suponga que cierto potencial eléctrico ϕ viene dado por $\phi(x, y) = x\sin(x)\cosh(y) - y\cos(x)\sinh(y)$. Encuentre el potencial complejo asociado.

P20. Recordando que $\mathrm{Log}(z) = \log(|z|) + i\mathrm{Arg}(z)$ donde $z = |z|e^{i\mathrm{Arg}(z)}$, con $\mathrm{Arg}(z) \in (-\pi, \pi]$, pruebe que $\mathrm{Log}(1 - z^2) = \mathrm{Log}(1 - z) + \mathrm{Log}(1 + z)$ para $|z| < 1$.

P21. Principio del módulo máximo
Sea D abierto y conexo y f una función holomorfa no constante sobre D. Entonces $\sup_{z\in D} |f(z)|$ no se alcanza en D.
De este principio se deduce lo siguiente:
Si D es abierto, conexo y acotado, f es continua en $\overline{D}$ y holomorfa en D entonces $\max_{z\in\overline{D}} |f(z)| = \max_{z\in\partial D} |f(z)|$.
Sea D un abierto conexo acotado $f : \overline{D} \to \mathbb{C}$ continua, no constante y holomorfa en D. Demuestre que si $|f(z)| = 1$ para todo $z \in \partial D$ entonces existe $z_0 \in D$ tal que $f(z_0) = 0$.

P22. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ continua en 0 tal que $f(z + w) = f(z)f(w)$ para todo $z, w \in \mathbb{C}$. Pruebe que f es continua en $\mathbb{C}$.

P23. (i) Encuentre el dominio $\Omega \subset C$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i}\log\left(\frac{1 + iz}{1 - iz}\right)$$

es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir $f(z) = \arctan(z)$.
(ii) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.