Guía de Ejercicios 3. **MA26B Matemáticas Aplicadas**. Semestre 2005-1

Profesor: Héctor Ramírez C. **Auxiliares:** Oscar Peredo, Felipe Torres.

Series complejas, Teorema de los Residuos y Ecuaciones en Derivadas Parciales.

P1. (i) Encuentre el dominio $\Omega \subset C$ donde la función

$$f(z) = \frac{1}{2i} \log\left(\frac{1+iz}{1-iz}\right)$$

es holomorfa, y demuestre que $\tan(f(z)) = z$, es decir $f(z) = \arctan(z)$.
(ii) Calcule f' y determine su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deduzca el desarrollo en serie para f en torno a $z = 0$.

P2. Usando la fórmula integral de Cauchy apropiadamente, calcule

$$\oint_{\Gamma} \frac{\operatorname{sen}(\pi z^2) + \cos(\pi z^2)}{(z-1)(z-2)} dz,$$

donde $\Gamma = \partial D(0,3)$ es la circunferencia de centro 0 y radio 3, recorrida en sentido antihorario.

P3. Encuentre el desarrollo en serie de potencias $\Sigma c_k z^k$ en torno a $z_0 = 0$, para la función

$$f(z) = 1/(1 - z - z^2).$$

Pruebe además que c_k es la sucesión de Fibonacci ($c_0 = c_1 = 1, c_{k+2} = c_k + c_{k+1}$).
Indicación: puede servirle separar en fracciones parciales.

P4. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series de potencias y estudiar la convergencia cuando $|z| = 1$:

$$\sum z^n, \quad \sum \frac{z^n}{n}, \quad \sum \frac{z^n}{n^2}.$$

P5. Si $\sum c_k(z - z_0)^k$ tiene radio de convergencia $\rho > 0$. ¿Cuál es el radio de convergencia de las siguientes series de potencias ?

$$\sum c_k(z - z_0)^{2k}, \quad \sum c_{2k}(z - z_0)^k, \quad \sum c_k^2(z - z_0)^k.$$

P6. Suponga que f y g tienen polos de orden m y n respectivamente en z_0. ¿Que puede decirse sobre las singularidades de $f + g, f \cdot g$ y $\frac{f}{g}$ en z_0?.

P7. Calcule las singularidades de las siguientes funciones:

$$\text{(i) } \frac{1}{z^4+z^2}, \qquad \text{(ii) } \operatorname{cotan} z, \qquad \text{(iii) } \operatorname{cosec} z, \qquad \text{(iv) } \frac{\exp(\frac{1}{z^2})}{z-1}.$$

P8. Demuestre el siguiente teorema:

Teorema (Cassorati-Weierstrass). *Sea $D = B(z_0, \delta) \setminus \{z_0\}$. Si f tiene una singularidad esencial en z_0 entonces $f(D)$ es denso es $\mathbb{C}$, es decir, para toda bola $B(z, \epsilon) \subset \mathbb{C}$ se tiene que $B(z, \epsilon) \cap f(D) \neq \phi$.*

Para ello, razone por contradicción suponiendo que existe una bola $B(w, \delta)$ que no intersecta a $f(D)$, utilize el principio de Riemann visto en cátedra: *Si una función g tiene una singularidad aislada en z_0 y si $\lim_{z \to z_0}(z - z_0)g(z) = 0$ entonces la singularidad es evitable* y deduzca que z_0 solamente puede ser un polo o una singularidad evitable f.

P9. Encontrar todas las series de Taylor y de Laurent con centro 0, y determinar las regiones para las cuales estas convergen, de las siguientes funciones:
(i) $f(z) = z^{-5} \operatorname{sen} z$, (ii) $f(z) = z^2 e^{1/z}$, (iii) $f(z) = 1/(z^3 - z^4)$, (iv) $f(z) = \frac{-2z+3}{z^2-3z+2}$.
Compare las regiones donde estas series convergen con las regiones que se obtienen a partir de los distintos teoremas de convergencia de series vistos en clases.

P10. Encontrar la serie de Taylor o la serie de Laurent de la función $f(z) = 1/(1 - z^2)$ en la región

$$\text{(i) } 0 \leq |z| < 1, \qquad \text{(ii) } |z| > 1, \qquad \text{(iii) } 0 \leq |z - 1| < 2.$$

P11. Desarrolle cada una de las siguientes funciones en una serie de Laurent convergente para la región $0 \leq |z - z_0| < R$, y determine la región precisa de convergencia.
(i) $f(z) = \cosh(2z)/z$, $z_0 = 0$, (ii) $f(z) = \frac{8-2z}{4z-z^3}$, $z_0 = 0$, (iii) $f(z) = z\cos(1/z)$, $z_0 = 0$,
(iv) $f(z) = z^{-5}e^{1/z^2}$, $z_0 = 0$, (v) $f(z) = \cos(z)/(z - \pi)^3$, $z_0 = \pi$,
(vi) $f(z) = \frac{z^4}{z+2i}$, $z_0 = -2i$, (vii) $f(z) = \operatorname{sen}(z)/(z - \frac{1}{4}\pi)^3$, $z_0 = \pi/4$.

P12. Muestre que si f es holomorfa en $z \neq 0$ y $f(-z) = -f(z)$ entonces todos los términos pares en su expansión de Laurent sobre $z = 0$ son iguales a cero.

P13. Encuentre la expansión en serie de Laurent de:

(i) $\frac{1}{z^4+z^2}$, sobre $z = 0$, (ii) $\frac{\exp(1/z^2)}{z-1}$, sobre $z = 0$, (iii) $\frac{1}{z^2-4}$, sobre $z = 2$.

P14. Calcule $\int_0^{2\pi} \cos(nx)/[1 + a^2 - 2a\cos(x)]\, dx$ con $a \in (0, 1)$ y $n \in \mathbf{N}$.
Indicación: integre la función $f(z) = [z^n + 1/z^n][\frac{1}{z-a} - \frac{1}{z-1/a}]$ sobre el círculo unitario.

P15. Calcule las siguientes integrales:
(a) $\int_\gamma \frac{1}{(1+z^2)^2} dz$ donde $\gamma(t) = 2|\cos 2t|e^{it}, 0 \leq t \leq 2\pi$.
(b) $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{x \sin x}{x^2+a^2} dx$ con $a > 0$.
(c) $\int_D \frac{3z^2+z/2}{z^3(z^2+1/4)} dz$ con $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ orientado en sentido antihorario.
(d) $\int_0^\infty \frac{x^2}{1+x^4} \cos(\pi x/\sqrt{2}) dx$.
(e) $\int_{C_k} \frac{dz}{(z^4-1)\cos(\pi z/2)}$ donde $k \in \mathbb{N}$ está dado, y C_k es la circunferencia de radio $R_k := 1/3 + k$ centrada en el origen.
(f) $\int_C \frac{1}{z^2(z^2+1)} dz$ donde C es la circunferencia de centro $i/2$ y radio 1 recorrida en sentido antihorario.

P16. Compruebe que para todo $a > 0$, $b > 0$ se tiene

$$\left| \int_0^{a+ib} \cos(z^2) dz \right| \leq \sqrt{a^2 + b^2} \frac{\operatorname{senh}(2ab)}{2ab}.$$

P17. Sean $a, b \in \mathbb{R}, a < b$. Pruebe que

$$\int_{c+ia}^{c+ib} \exp(-z^2) dz \rightarrow 0, \qquad \text{cuando } c \rightarrow \pm\infty.$$

P18. Sea $b > 0$. Muestre que

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp(-t^2) \cos(2\pi bt) dt = \sqrt{\pi} \exp(-b^2\pi^2)$$

P19. Demuestre que para todo par de enteros $n > k \geq 1$,

$$\binom{n}{k} = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \frac{(z+1)^n}{z^{k+1}} dz,$$

donde $\Gamma \subset \mathbb{C} \setminus \{0\}$ es cualquier camino cerrado y simple que encierra al origen, y que se recorre en sentido antihorario. Usando lo anterior, pruebe que

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{2n}{n} \frac{1}{5^n} = \sqrt{5}.$$

P20. Sea $P(z)$ un polinomio de grado n. Una raíz $\lambda \in \mathbb{C}$ de $P(z)$ se dice *estable* si su parte real es estrictamente negativa, i.e., $Re(\lambda) < 0$. Suponiendo que el polinomio no tiene raíces imaginarias puras, i.e., $P(iy) \neq 0$ para todo $y \in \mathbb{R}$, pruebe que

$$\frac{n}{2} + \frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{-R}^{R} \frac{P'(iy)}{P(iy)} dy = \text{número total de raíces estables de } P(z),$$

donde en este número se incluye la multiplicidad de las raíces.

Indicación: Notar que si p es una raíz de f de multiplicidad m entonces p es un polo simple de $g(z) := f'(z)/f(z)$ y que $\text{Res}(g, p) = m$.

P21. Mediante series de Fourier, calcule el valor de

$$\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n^2} \qquad \text{y} \qquad \sum_{n\geq 1} \frac{(-1)^n}{n^2}.$$

Indicación: Considerar la función $f(x) = x^2$ en el intervalo $[-\pi, \pi]$.

P22. Resuelva (por separación de variables) la ecuación de Helmholz

$$\Delta u + u = 0$$

en la región $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1; 0 \leq y \leq 2\}$ con condiciones de borde

$$u(x, 0) = u(0, y) = u(1, y) = 0 \ \text{ y } \ u(x, 2) = x(1 - x), \quad \forall (x, y) \in \Omega.$$

P23. Encontrar las soluciones elementales en variables separadas de

$$u_t = a u_{xx} - bu, \quad 0 < x < \ell, \ t > 0$$

con condiciones de borde Dirichlet (a, b constantes positivas conocidas).

P24. Resuelva el siguiente sistema

$$\begin{array}{lr}
\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - cos(x) & 0 < x < 2\pi \quad t > 0 \\
\frac{\partial y}{\partial t}(x,0) = 0 & 0 < x < 2\pi \\
y(0, t) = y(2\pi, t) = 0 & t > 0 \\
y(x, 0) = 0 & 0 < x < 2\pi.
\end{array}$$

Indicación: Considere soluciones del tipo $y(x, t) = Y(x, t) - h(x)$ para una función h adecuada y aplique técnicas conocidas.

P25. Sea $u = v(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, t)$ una solución con simetría "radial" de la ecuación de ondas

$$u_{tt} = c^2 \Delta u \quad \text{ en } \mathbb{R}^3.$$

(i) Probar que v satisface la ecuación $v_{tt} = c^2[v_{rr} + 2v_r/r]$ para $r \geq 0, t \geq 0$.
(ii) Sea $w(r, t) = rv(r, t)$. Probar que w satisface la ecuación de ondas unidimensional.
(iii) Encontrar w para las condiciones iniciales $u(x, y, z, 0) = \exp(-r^2)$ y $u_t(x, y, z, 0) = 0$.

P26. Resuelva el problema de Dirichlet en el circulo:

$$\begin{array}{rcll}
\triangle u & = & 0 & R > r \\
u(R, \theta) & = & f(\theta) & \theta \in [0, 2\pi].
\end{array}$$

Observe que a utilizar separación de variables, si $u(r, \theta) = A(r)B(\theta)$, entonces $B(0) = B(2\pi)$ y $B'(0) = B'(2\pi)$.

P27. Resuelva el problema de Neumann en el circulo:

$$\begin{array}{rcll}
\triangle u & = & 0 & R > r \\
u_r(R, \theta) & = & f(\theta) & \theta \in [0, 2\pi].
\end{array}$$

P28. Resuelva la EDP no homogénea de una dimensión:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= F(x,t) \qquad x \in (0,\pi), t > 0 \\ u(x,0) &= f(x) \\ u(0,t) = u(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

P29. Resuelva un caso particular del problema anterior:

$$\begin{aligned} u_t - ku_{xx} &= x \qquad x \in [0,\pi], t > 0 \\ u(x,0) = u_t(x,0) = u(0,t) = u(\pi,t) &= 0. \end{aligned}$$

P30. Resuelva:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 4 \qquad 1 > r \\ u(1,\theta) &= \cos(2\theta) \qquad \theta \in [0,2\pi]. \end{aligned}$$

P31. Resuelva:

$$\begin{aligned} \triangle u &= 0 \qquad 2 > r > 1, \pi > \theta > 0 \\ u(1,\theta) = u(2,\theta) = u(r,0) &= 0 \\ u_\theta(r,\pi) &= r^2. \end{aligned}$$

P32. Resuelva la ecuación del calor en un cuadrado:

$$\begin{aligned} u_t - k(u_{xx} + u_{yy}) &= 0 \qquad (x,y) \in (0,\pi)^2, t > 0 \\ u(x,y,0) &= f(x,y) \\ u(x,0,t) = u(x,\pi,t) = u(0,y,t) = u(\pi,y,t) &= 0. \end{aligned}$$

P33. Resuelva la ecuación del calor en un cubo:

$$\begin{aligned} u_t - k(u_{xx} + u_{yy} + u_{zz}) &= 0 \qquad (x,y,z) \in (0,\pi)^3, t > 0 \\ u(x,y,z,0) &= f(x,y) \\ u(0,y,z,t) = u(\pi,y,z,t) = u(x,y,\pi,t) &= 0 \\ u_y(x,0,z,t) = u_y(x,\pi,z,t) &= 0. \end{aligned}$$

P34. Dos gases uniformemente distribuídos en un volúmen $\Omega \subset I\!R^3$ se encuentran a temperaturas $u(x,y,z,t)$ y $v(x,y,z,t)$, satisfaciéndose las ecuaciones

$$\begin{aligned} &(1) \quad u_t = c^2 \Delta u - k(u - v) \\ &(2) \quad v_t = a^2 \Delta v - l(v - u) \end{aligned}$$

donde $k > 0$ y $l > 0$ son constantes relacionadas con el intercambio de calor entre los gases. La superficie $\partial\Omega$ es adiabática ($\nabla u \cdot \hat{n} = \nabla v \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$), y en el instante inicial ($t = 0$) las temperaturas u, v son constantes en todo Ω iguales a u_0 y v_0 respectivamente.
(a) Sea $U(t) = \iiint_\Omega u \ dxdydz$ y $V(t) = \iiint_\Omega v \ dxdydz$. Probar que $\dot{U} = -k(U - V)$ y análogamente $\dot{V} = -l(V - U)$.
(b) Deducir que la cantidad $K(t) = lU(t) + kV(t)$ se conserva y probar que

$$\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{lu_0 + kv_0}{k + l} \mu(\Omega).$$

(c) Sea $w : \Omega \to I\!R$ solución de la ecuación auxiliar

$$\left\{ \begin{array}{l} \Delta w = \alpha w \quad en \ \ \Omega \\ \nabla w \cdot \hat{n} = 0 \quad en \ \ \partial\Omega \end{array} \right.$$

(c.1) Probar la identidad: $\iint_{\partial\Omega} w \nabla w \cdot d\vec{S} = \iiint_\Omega \|\nabla w\|^2 + \alpha \iiint_\Omega w^2$.
(c.2) Deducir que "$\alpha > 0 \Rightarrow w \equiv 0$" y "$\alpha = 0 \Rightarrow w \equiv$ constante".

(d) Considere ahora las ecuaciones (1) y (2) en **régimen estacionario** y sean $\bar{u}, \bar{v}$ las soluciones. Probar primero que $\bar{u} - \bar{v} \equiv 0$, y luego que $\bar{u} \equiv cte \equiv \bar{v}$.

(e) Calcular, usando la parte (b), la temperatura constante del régimen estacionario.

P35. Calcule la transformada de Fourier de $f(x) = \cos(\pi x)/[x^3 - x^2 + 4x - 4]$.

P36. Sea $f(x) = \exp(-a|x|)$, pruebe que la transformada de Fourier de f viene dada por

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{a}{a^2 + s^2}.$$

P37. La mezcla de dos fluidos en un tubo infinitamente largo puede modelarse a través de la ecuación de convexión-difusión: $u_t = u_x + \alpha u_{xx}$, con condición inicial $u(x,0) = f(x)$.
(i) Probar que la transformada de Fourier $\hat{u}(s,t) = u(\cdot,t)(s)$ es igual a

$$\hat{u}(s,t) = \hat{f}(s) \exp(is - \alpha s^2)t.$$

(ii) Deducir que la solución puede expresarse como

$$u(x,t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(y) G(x-y,t) dy.$$

(iii) Determinar el núcleo de Green $G(x,t)$.

P38. Resolver por Transformada de Fourier:

$$\begin{cases} u_{tt} = a^2 u_{xx}, & -\infty < x < \infty,\ t > 0 \\ u(x,0) = f(x), & -\infty < x < \infty \\ u_t(x,0) = 0, & -\infty < x < \infty \end{cases}$$

P39. Considere la ecuación de ondas

$$(\textsc{eo}) \quad \begin{cases} u_{tt} = 16 u_{xx} & x \in \mathbb{R}; t > 0 \\ u(0,x) = \exp(-|x|) & x \in \mathbb{R} \\ u_t(0,x) = 0 & x \in \mathbb{R} \end{cases}$$

(i) Pruebe que la transformada de Fourier de $u(t,\cdot)$ es $\hat{u}(t,s) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cos(4st)/[1 + s^2]$.

(ii) Calcule la solución $u(t,x)$ de (EO). Indicación: puede usar el teorema de residuos de Cauchy, o bien las propiedades algebraicas de la transformada de Fourier.

P40. Se desea determinar la evolución de la temperatura $u(t,x)$ en una barra semi-infinita cuando hay transferencia de calor al medio circundante según el modelo

$$u_t = k u_{xx} - \gamma u, \quad t > 0, \quad 0 < x < \infty$$

donde $k > 0$ es el coeficiente de difusividad térmica y $\gamma > 0$ es el coeficiente de transferencia de calor. Suponga que la barra está aislada en $x = 0$, esto es

$$u_x(t,0) = 0, \quad t > 0$$

y que la distribución inicial de temperaturas esta dada por una función $f(x)$, es decir

$$u(0,x) = f(x), \quad 0 < x < \infty.$$

Pruebe que u se puede expresar como $u(t,x) = [f(\cdot) * G(t,\cdot)](x)$ para una función $G(t,x)$ la cual se pide determinar usando el método de la transformada de Fourier.

Indicación: Extienda apropiadamente el problema a todo $-\infty < x < \infty$.

P41. Para $h > 0$ constante, considere la ecuación

$$u_t = u_{xx} - h u_x, \qquad -\infty < x < \infty, t > 0$$

con condición inicial

$$u(x,0) = f(x), \qquad -\infty < x < \infty.$$

Use el método de la Transformada de Fourier (suponiendo que las transformadas existen) para demostrar que

$$u(x,t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x - th + 2y\sqrt{t}) \exp(-y^2) dy.$$

Indicación: Pruebe que $\int_{-\infty}^{\infty} \exp((\alpha + is)^2) ds = \sqrt{\pi}$ para todo $\alpha \in I\!R$.