Guía 10, Ecuaciones en Derivadas Parciales

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer
Auxs. R. Gonzalez, M. Reyes

1. Hallar la solución de

$$a)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= \operatorname{sen} \pi x \qquad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad x \in [0,1] \\ u(0,t) &= u(1,t) = 0 \end{aligned}$$

$$b)\qquad \begin{aligned} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0 \qquad x \in (0,1), \quad t > 0 \\ u(x,0) &= \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = 0 \qquad x \in [0,1] \\ u(0,t) &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x}(1,t) &= t^2 e^t \end{aligned}$$

2. a) Demostrar que si el operador $L[u] = A\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + B\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + C\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0$ es hiperbólico y$A \neq 0$, la transformación a coordenadas móviles $x' = x - \frac{B}{2A}t$; $t' = t$ convierte L en un múltiplo del operador de onda.
b) Utilizando este resultado, halle la solucióndel problema de valores iniciales $L[u] = F(x,t)$, $\quad u(x,0) = f(x)$, $\quad \frac{\partial u}{\partial t}(x,0) = g(x)$. En particular, en cuentre el dominio de dependencia de un punto $(\bar{x},\bar{t})$.

3. a) Clasificar los operadores siguientes y encontrar sus características (si existen) que pasan por el punto (0,1).

$$(a)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (b)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + 4\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \qquad (c)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - 4\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

b) Hallar dónde son hiperbólicos, parabólicos y elípticos los siguientes operadores

$$(a)\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + t\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + x\frac{\partial u}{\partial x} \qquad (b)\ x^2\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \qquad (c)\ t\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + 2\frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t} + x\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x}$$

4.a) Demostrar que el problema

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x}\left(e^x \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(e^y \frac{\partial u}{\partial y}\right) = 0, &\qquad x^2 + y^2 < 1 \\ u = x^2 &\qquad x^2 + y^2 = 1 \end{aligned}$$

tiene a lo sumo una solución. Indicación: Usar el teorema de la divergencia para deducir una identidad de energía.

b) Demostrar que si C es una curva cerrada derivable con continuidad a trozos que limita D, el problema

$$\begin{aligned} \Delta u &= -F(x,y), && \text{en } D \\ u &= f, && \text{sobre } C_1, \\ \frac{\partial u}{\partial n} + \alpha u &= 0, && \text{sobre } C_2, \end{aligned}$$

donde C_1 es una parte de C y C_2 la parte restante, y α es una constante positiva, tiene a lo sumo una solución.
Observación. Este problema corresponde a sujetar un soporte elástico con elasticidad constante α a la parte C_2 del contorno de la membrana.

5. Demostrar que una solución de la ecuación no lineal

$$\frac{\partial E}{\partial u}(x,y,z,u(x,y,z,t))\frac{\partial u}{\partial t} - \operatorname{div}[K(x,y,z,u(x,y,z,t))\,\mathrm{grad}, u] = 0$$

satisface el mismo principio del máximo que una solución de la ecuación de la ecuación del calor, con tal que $\frac{\partial E}{\partial u} > 0$ y $K > 0$.

6. Considere dos gases distribuidos en una región acotada $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ que se encuentran a temperaturas $u(x,y,z,t)$ y $v(x,y,z,t)$ y que satisfacen las ecuaciones en derivadas parciales siguientes

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u - k(u-v) \tag{1}$$
$$\frac{\partial v}{\partial t} = \Delta v - l(v-u) \tag{2}$$

donde $k, l > 0$ son constantes que dependen de los gases.
Se sabe además que en la superficie de la región, que denotaremos por $\partial\Omega$, de normal unitaria $\hat{n}$ se verifica $\nabla u \cdot \hat{n} = \nabla v \cdot \hat{n} = 0$ y en el instante inicial $t = 0$, las temperaturas u y v son constantes e iguales a u_0 y v_0, respectivamente.
a) Si definimos $U(t) = \int_\Omega u(x,y,z,t)dxdydz$ y $V(t) = \int_\Omega v(x,y,z,t)dxdydz$, demuestre que

$$\frac{dU(t)}{dt} = -k(U(t) - V(t)) \qquad \text{y} \qquad \frac{dV(t)}{dt} = -l(V(t) - U(t))$$

b) Deducir que $K(t) = lU(t) + kv(t) =$cte. Demuestre además que $\lim_{t\to\infty} U(t) = \lim_{t\to\infty} V(t) = \frac{lu_0 + kv_0}{k+l}\int_\Omega dx\,dy\,dz$.
c) Sea $\omega : \Omega \to \mathbb{R}$ una solución de la ecuación $\Delta\omega = \alpha\omega$ en Ω y $\nabla\omega \cdot \hat{n} = 0$ en $\partial\Omega$
Deduzca que si $\alpha > 0$, entonces $\omega = 0$, y si $\alpha = 0$ entonces ω es constante.
d) Considere las ecuaciones (1) y (2) en régimen estacionario y sean $\bar{u}$ y $\bar{v}$ un par de soluciones. Probar que $\bar{u} - \bar{v} = 0$ y que $\bar{u} = \bar{v} =$cte.
e)Calcular la temperatura de los gases en régimen estacionario.