# Guía 1 - MA26B

Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Prof. Patricio Felmer
Auxs. R. Gonzalez, M. Reyes

1. Determinar la parametrización de una curva plana tal que el producto de las distancias a dos focos en la abscisa es constante (Lemniscata).

2. Una circunferencia de ecuación $(x-2a)^2+y^2=a^2$ es utilizada para construir el Cissoide de Diocles. Se tienen una recta de ecuación $x=2a$, y otra de longitud variable que parte del origen $O$, corta a la circunsferencia en $A$, pasa por el punto $P$ quien describe la trayectoria, y termina en el punto B móvil sobre la recta. La condición geométrica que define al Cissoide, es que los trazos $\bar{OP}$ y $\bar{PB}$ son iguales, a medida que se mueve el punto $B$ sobre la recta.
i) Encontrar la parametrización. Resp. $\alpha(t)=(\frac{2at^2}{1+t^2},\frac{2at^3}{1+t^2})$.
ii) Demuestre que el 0 es el único punto singular (derivada nula) y que la distancia horizontal a la recta $x=2a$ tiende a 0 si $t\to\infty$.

3. Demostrar que la longitud de la curva plana definida por $\gamma(t)=(t, t\operatorname{sen}(\frac{\pi}{t}))$ con $t\in[0,1]$ es infinita. Indicación. Acote la integral por una suma, fijándose en la geometría de los máximos de esta curva.

4.- Para la curva definida por $y=x^3$, $z=\frac{\sqrt{6}}{2}x^2$, encontrar la longitud de la curva.

5.i) Sea $\sigma(s)\in C^3$ la parametrización en longitud de arco de una curva. Demostrar que una expresión para la torsión $\tau(s)$ es

$$\tau(s)=-\frac{[\sigma'(s)\times\sigma''(s)]\cdot\sigma'''(s)}{||\sigma''(s)||^2},$$

donde $\frac{d\hat{b}}{ds}(s)=\tau(s)\hat{n}$.
ii) Calcular la torsión de la hélice $\sigma(s)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t, \operatorname{sen} t, t)$, con $t\in[0,4\pi]$.
Nota. La parametrización no está en longitud de arco.

6. Sean $\Gamma$ una curva plana y $f: R^2\to R$ una función diferenciable tal que $f(r,\theta)=0$ sobre la curva $\Gamma$. Probar que el vector $\frac{\partial f}{\partial r}\hat{r}+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial\theta}\hat{\theta}$ es normal a la curva $\Gamma$.

7. Sea $\gamma(t)=(Re^{-at}\cos t, Re^{-at}\operatorname{sen} t, t)$, con $t\in[0,4\pi]$. Determinar la parametrización en logitud de arco, la curvatura y la binormal en cada punto de la curva.

8. Si $u,v: R\to R^3$, son dos funciones diferenciables tales que

$$\begin{aligned} u'(t) &= Au(t)+Bv(t)\\ v'(t) &= Cu(t)-Av(t), \end{aligned}$$

con $A,B,C\in R^3$, constantes, probar que $u(t)\times v(t)$ es constante para todo $t$.