Guía 2, Superficies I

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer, R. Gormaz
Auxs. J. Correa, R. Gonzalez, A. Moreira, M. Reyes

1. Sea S la superficie elipsoidal dada por $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$, con a,b,c constantes positivas. Determinar la parametrización de S y el área. Indicación, pruebe que la imagen de la esfera unitaria de R^3 por la transformación lineal $L(x,y,z)=(ax,by,cz)$ es el elipsoide mencionado. Utilice coordenadas esféricas.
Describa geometricamente la curva intersección entre el elipsoide y el plano $z=h$. Encuentre una parametrización de esta curva.

2. Sea S la superficie definida por $z=x\phi(\frac{y}{x})$, donde ϕ es una función derivable. Probar que todos los planos tangentes a la superficie S pasan por el origen de los ejes de coordenadas.
Indicaciones. Encontrar una la parametrización γ de esta superficie S. Calcular el plano tangente a partir de la normal.

3. Calcular $\int_S xy dS$, donde S es la superficie del tetraedro con los lados $z=0$, $y=0$, $x+z=1$ y $x=y$.

4. a) Considere la esfera de centro $(0,0,1)$ y radio 1. Se asocia a $q\in S$ el punto $H(q)$ obtenido al intersectar la recta que pasa por $(0,0,2)$ y q con el plano (x,y). Encuentre explícitamente $\Phi(x,y)=H^{-1}(x,y)$. Verifique que Φ es una parametrización de la esfera y que $\Phi(R^2)=S-\{(0,0,2)\}$.
b) Sea S una esfera de radio R y $\vec{p}$ un punto dentro o fuera de S, demuestre que $\displaystyle\int_S \frac{1}{||\vec{x}-\vec{p}||}dS$ vale $4\pi R$ si p está dentro de la esfera y $\dfrac{4\pi R^2}{||\vec{p}||}$ si está fuera.
c) Calcule $\int_S \delta_0(x,y,z)dS$ donde S es una esfera y $\delta_0(x,y,z)$ es la distancia de (x,y,z) a algún punto $(x_0,y_0,z_0)\in S$.

5) Dada la superficie definida por

$$z=4-x^2-y^2,\quad z\geq 0$$

i) Bosquejar su gráfico. Qué curvas se producen en las intersecciones con los planos $x=cte.$, $y=cte'$, $z=cte''$.
ii) Calcule el plano tangente en el punto $(1,1,2)$. iii) Calcule el centro de masa suponiendo densidad constante.