Guía 3, Gauss y Stokes

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer, R. Gormaz
Auxs. J. Correa, R. Gonzalez, A. Moreira, M. Reyes

1. Sea $F \in C^1(R)$, Definimos un campo escalar $\phi(x) = F(||x||_2)$ para todo $x \in R^n$.
a) Probar que existe un campo escalar λ tal que

$$\nabla\phi(x) = \lambda(x)\, x \tag{1}$$

b) Reciprocamente, si ϕ y λ son campos escalares que verifican (1), con $\phi \in C^1(R)$, $\lambda \in C^0(R)$. Probar que el campo ϕ tiene simetría radial (esto es, depende de $||x||_2$).

2. Sea S una superficie suave (fig.1) y P un punto tales que toda recta que pasa por P corta S en a lo más un punto, sea Ω la unión de todas las semirectas que parten de P y pasan por S y sea ϵ_a la intersección de Ω con la esfera (superficie esférica) de centro P y radio a.
Demuestre que $s = \dfrac{\text{area de } \epsilon_a}{a^2} = \displaystyle\int_S \frac{(x-P)\cdot\hat{n}}{||x-P||^3} dS$.
Nota: s se denomina ángulo sólido de S con respecto a P.

3. Demuestre la siguiente identidad de Green para $f \in C^2(V)$, $g \in C^1(V)$ con $\Omega \subset V$

$$\int_{\partial\Omega} g\nabla f \cdot \hat{n}\, dS = \int_\Omega (g\Delta f + \nabla f \nabla g) dV$$

4. Demuestre el teorema de Gauss (fig.2) en forma directa en el caso de tener un cilindro vertical V entre las alturas $x_3 = a$ y $x_3 = b$ y cuyos bordes verticales se proyectan sobre la curva $c(t) = (c_1(t), c_2(t), 0)$.

5. De la física del electromagnetismo se sabe que el campo eléctrico E en un punto p debido a la presencia de un alambre rectilineo infinito, de densidad lineal de carga uniforme σ, es radial y además satisface $\nabla E = \frac{\sigma}{\epsilon_0}$, con ϵ_0 una constante. Demostrar que la expresión para este campo en el punto p es $E(\vec{r}) = \frac{\sigma}{2\pi\epsilon_0 r}\hat{r}$.
Puede suponer que la densidad de carga ocupa un cilindro infinito de radio muy pequeño y aplicar el teorema de Gauss sobre algún volumen conveniente.
Ud. también puede demostrar la ecuación mencionada ($\nabla E = ...$) sabiendo que, en general, el campo eléctrico tiene la forma $E(\vec{r_0}) = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\displaystyle\int \frac{\sigma(\vec{r})\,(\vec{r}-\vec{r_0})\; dV}{||\vec{r}-\vec{r_0}||^3}$