Guía 5, Complejos I

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer, R. Gormaz
Auxs. J. Correa, R. Gonzalez, A. Moreira, M. Reyes

1. Sea $f : D \subset C \to C$ con $f(x,y) = u(x,y) + iv(x,y)$.
i) Demostrar que si f y f^2 son armónicas, entonces f o $\bar{f}$ es analítica.
Observación. $f = u + iv$ es armónica ssi $\Delta u = 0$ y $\Delta v = 0$.
ii) Demostrar que si $u + iv$ y $v + iu$ son analíticas entonces $u + iv$ es constante.

2. Escribir las ecuaciones de Cauchy-Riemann en coordenadas polares.
Solución. $\frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} = \frac{\partial u}{\partial r}$ y $\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\partial v}{\partial r}$.

3. Encontrar la función arco-coseno de un complejo. Solución $\operatorname{arcCos} z = -i \log[z + \sqrt{z^2 - 1}]$.

4. Calcule las siguientes integrales complejas sobre los caminos que se indican

$$\int_C \bar{z} dz \qquad \int_C \frac{dz}{z} \qquad C : |z| = R$$

$$\int_C (1 + z^2) dz \qquad C : [0, 1 + i] \quad C : [0, 1] \cup [1, 1 + i]$$

5. Sea $D \subset C$ conexo por arcos, es decir que para todo par de puntos $z_1, z_2 \in D$ existe una curva regular γ en C que los une. Demostrar que si una función $f : D \to C$ analítica en D cumple $f'(z) = 0$, para todo $z \in D$, entonces f es constante en D.