Guía 7, Complejos III

MA26B - Matemáticas Aplicadas

Semestre 95/2

Profs. P. Felmer, R. Gormaz
Auxs. J. Correa, R. Gonzalez, A. Moreira, M. Reyes

Desarrollos en serie.

1. a) Derminar el desarrollo en series de potencias de la función $f(z) = e^{3z} - 3e^z + 2$ en torno al origen.
b)Probar que, para $|z| < 1$, $(\ln(z+1))^2 = 2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+1} H_n z^{n+1}$, con $H_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
c) Obtener el desarrollo en serie de $\ln \frac{1+z}{1-z}$ y calcular el radio de convergencia.
d) Encontrar el desarrollo en serie, en torno al origen, de $f(z) = \frac{z^2-1}{(z+3)(z+2)}$.
Indicación: demuestre que $\frac{1}{a+z} = \frac{1}{a}\sum_{n\geq 0}(\frac{-z}{a})^n$, para $|z| < |a|$.

2. Determinar el radio de convergencia de las siguientes series.

$$i) \sum_{n\geq 0} \frac{z^n}{e^n} \qquad ii) \sum_{n\geq 1} \frac{n!z^n}{n^n} \qquad iii) \sum_{n\geq 0} n^{(\log n)^2} z^n$$

$$iv) \sum_{n\geq 0} a_n z^n, \;\; donde\; a_{2n} = \alpha^{2n},\; a_{2n+1} = \beta^{2n+1},\; con\; \alpha, \beta \in (0,1).$$

2. a) Encontrar el dominio $\Omega \subset C$, conde la función $f(z) = \frac{1}{2i}\log\frac{1+iz}{1-iz}$ es analítica y demostrar que $tan f(z) = z$, es decir que $f(z) = arctg(z)$.
b) Calcular f' y determinar su desarrollo en serie de potencias en torno a $z = 0$, explicitando el radio de convergencia. Deducir el desarrollo de f en torno a $z = 0$.

4. Sean $f, g : \Omega \subset C \to C$ funciones tales que $f'(z) = g(z)$, $g'(z) = -f(z)$ para todo z tal que $|z| < r$, con $r > 0$. Si además, $f(0) = 0$, $g(0) = 1$, demostrar que para $|z| < r$, f y g tienen expanción en las series $f(z) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} z^{2n+1}$ y $g(z) = \sum \frac{(-1)^n}{(2n)!} z^{2n}$.