Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Matemática

Control 1 – Ma34a – Probabilidades

11 de Abril de 2005

Profesor: Daniel Remenik
Profesor Auxiliar: Alexis Fuentes

Tiempo: 3 horas

P1. (a) (2 puntos) Se realiza una serie independiente de lanzamientos de una moneda no–equilibrada. Cada lanzamiento resulta en cara con probabilidad p y en sello con probabilidad $(1-p)$. Denote por P_n la probabilidad de que n lanzamientos resulten en una cantidad par de caras (con lo que $P_0 = 1$). Demuestre que

$$P_n = p(1 - P_{n-1}) + (1-p)P_{n-1}, \quad n \geq 1.$$

Use lo anterior para probar por inducción que

$$P_n = \frac{1 + (1-2p)^n}{2}, \quad n \geq 1.$$

(b) (2 puntos) Un estudiante de probabilidades viaja en tren por el sur de Chile. Su experiencia como lechero le ha enseñado que se puede asumir que 3/8 de las vacas sureñas son negras con manchas blancas, 3/8 son blancas con manchas negras y 1/4 tienen un lado negro con manchas blancas y el otro lado blanco con manchas negras. El estudiante ve por la ventana a una vaca blanca con manchas negras, pero sólo le ve un lado (asuma que la probabilidad de ver cualquier lado de una vaca es 1/2), y deduce que la probabilidad de que la vaca sea completamente blanca con manchas negras es 3/5. ¿Está usted de acuerdo con el estudiante? Justifique.

(c) (2 puntos) 8 parejas se sientan al azar en una mesa redonda. ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente k mujeres queden sentadas al lado de su esposo? (Entregue una expresión para el resultado, pero no calcule el valor exacto).

P2. Supongamos que hay N tipos distintos de cupones y que se extraen sucesivamente cupones al azar de una reserva infinita con todos los tipos de cupones. Es decir, suponemos que cada vez que se extrae un cupón, el cupón que se obtiene es independiente de los cupones anteriores y es igualmente probable que sea de cualquiera de los N tipos. Nos interesa responder la siguiente pregunta:

> ¿Cuál es la probabilidad de haber obtenido el k-ésimo tipo distinto de cupón justo en la m-ésima extracción?

Denotemos por $W_{k,m}$ al evento en cuestión, es decir, al evento "el k-ésimo tipo distinto de cupón se obtuvo en la m-ésima extracción".

(a) Denotemos por $V_{i,m}$ al evento "hasta la m-ésima extracción se habían obtenido i tipos de cupones distintos". Queremos calcular $\mathbb{P}(V_{i,m})$. Para ello definamos el evento $A_{j,m}$ como "al sacar m cupones, el tipo j no está".

(I) (0,5 punto) Sea $K \subseteq \{1, \ldots, N\}$ tal que el cardinal de K es k. Calcule $\#\left(\bigcap_{j\in K} A_{j,m}\right)$.

(II) (1,5 punto) Demuestre la siguiente expresión para la cantidad de combinaciones en que ningún tipo de cupón falta en m extracciones

$$\#\left(\bigcap_{j=1,\ldots,N} {A_{j,m}}^C\right) = \sum_{r=0}^{N} (-1)^r \binom{N}{r} (N-r)^m.$$

(III) (1 punto) Deduzca que

$$\mathbb{P}(V_{i,m}) = \binom{N}{i} \sum_{j=0}^{i} (-1)^j \binom{i}{j} \left(\frac{i-j}{N}\right)^m.$$

(b) (1 punto) Justifique la igualdad

$$W_{k,m} = V_{k-1,m-1} \cap V_{k,m}.$$

(c) (1,5 puntos) Demuestre que

$$\mathbb{P}(W_{k,m}) = \mathbb{P}(V_{k-1,m-1}) \frac{N-k+1}{N}.$$

(d) (0,5 punto) Deduzca que

$$\mathbb{P}(W_{k,m}) = \binom{N-1}{k-1} \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^j \binom{k-1}{j} \left[\frac{k-1-j}{N}\right]^{m-1}.$$

P3. (a) En un campeonato de tenis juegan n jugadores. El torneo es tipo "round–robin", es decir, cada una de las $\binom{n}{2}$ parejas posibles se enfrentan y el torneo lo gana aquel jugador que gane más partidos. Una pregunta interesante en este tipo de torneos es la siguiente:

> Dado $k \in \mathbb{N}$ tal que $1 < k < n$, ¿existe, para cada subconjunto de k jugadores, un jugador que los haya vencido a todos?

Denotemos por E a dicho evento. Nuestro propósito es demostrar que si

$$\binom{n}{k} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^k\right]^{n-k} < 1,$$

entonces tal suceso es posible.

(I) (0,5 punto) Dado un subconjunto A de k jugadores, defina el evento E_A como aquél en que existe un jugador que venció a los k jugadores. Escriba E en términos de los eventos E_A.

(II) (2 puntos) Dado $A \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que $|A| = k$, demuestre que

$$\mathbb{P}({E_A}^C) = \left(1 - \frac{1}{2^k}\right)^{n-k}.$$

(III) (2 puntos) Concluya.
Hint: Use la desigualdad de Boole.

(b) (1,5 puntos) Pruebe la desigualdad de Bonferroni:

$$\mathbb{P}(A_1 \cap \cdots \cap A_n) \geq \mathbb{P}(A_1) + \cdots + \mathbb{P}(A_n) - (n-1).$$