MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos **22 de Abril, 1996**

Control No. 1

Prof. Cátedras: F. Farias, M. Kiwi, y A. Maass
Prof. Auxiliares: D. Hojman, J.P. Risco, y P.P. Romagnoli

TIEMPO: 3.0 HRS.

PROBLEMA 1: Sea $(\Omega, \mathcal{B}, I\!P)$ un espacio de probabilidad y $f : \Omega \to \Omega'$ una función. En este problema definimos una estructura probabilista sobre Ω' que hereda aquella sobre Ω a través de f.

1. (2 pts.) Se define la clase de subconjuntos de Ω' siguiente:

$$\mathcal{B}' \;=\; \{A \subseteq \Omega' : f^{-1}(A) \in \mathcal{B}\} .$$

   Pruebe que $\mathcal{B}'$ es una σ-álgebra.

2. (2 pts.) Para cada $A \in \mathcal{B}'$ definimos $I\!P'(A) = I\!P(f^{-1}(A))$. Pruebe que $I\!P'$ es una medida de probabilidad sobre $(\Omega', \mathcal{B}')$.

3. (2 pts.) Sea $\Omega = \Omega' = [0,1)$ y $f : [0,1) \to [0,1)$ tal que $f(x) = 2x \pmod 1$. En Ω consideramos la σ-álgebra de los Borelianos y la probabilidad $I\!P$ dada por el largo de un intervalo, en particular, $I\!P([a,b]) = b - a$. Sea $\mathcal{B}'$ la σ-álgebra y $I\!P'$ la medida de probabilidad inducidas for f (i.e., definidas anteriormente). Pruebe que si I es un intervalo de $[0,1)$, entonces

$$I\!P'(I) \;=\; I\!P(I) .$$

PROBLEMA 2: Se ha realizado un robo de valiosas obras de arte. Se sabe que los malechores se encuentran en una de dos posibles regiones con igual probabilidad y que se comunican diariamente con un reducidor. La policía está interfiriendo las comunicaciones en las dos regiones. Sin embargo, en caso de intercepción la policía es incapaz de determinar la región en que se originó la comunicación. En cada día, la probabilidad de que la policía intercepte la comunicación de los malechores, si están en la región 1 es $p_1 = \frac{1}{2}$, y si están en la región 2 es $p_2 = \frac{1}{4}$. El rastreo se repite cada día. Asuma que el éxito o fracaso de dicho rastreo dado que los malechores se encuentran en una región particular, es independiente día a día.

(En lo que sigue, indique claramente el espacio muestral, σ-álgebra asociada, y los supuestos en que se basa para modelar la situación descrita.)

1. (2 pts.) Calcule la probabilidad que los malechores se encuentren en la región $i \in \{1, 2\}$ si se intercepta su comunicación el primer día.

2. (2 pts.) Calcule la probabilidad de que si la primera intercepción es el n-ésimo día entonces los malechores estén en la i-ésima región. Evalue para $n = 2$ y $n = 3$. Comente.

3. (2 pts.) Para distraer a la policía los malechores deciden (cada noche) si se mueven a la otra región. Asuma que la decisión de moverse es independiente noche a noche. Si están en la región $i \in \{1, 2\}$, la probabilidad de cambiarse de región es q_i, donde $q_1 = \frac{1}{2}$ y $q_2 = \frac{1}{4}$. Calcule la probabilidad de que los malechores se encuentren en la región $i \in \{1, 2\}$ al comienzo del tercer día.

PROBLEMA 3: Un satélite de comunicaciones tiene n unidades emisoras que se ocupan de enviar informaciones codificadas a n decodificadores en tierra. El satélite esta programado para que el i-ésimo emisor envíe sus mensajes sólo al i-ésimo decodificador. Una vez lanzado el satélite se descubre que existe un desperfecto. Como consecuencia, cada emisor queda enviando todos sus mensajes a un sólo decodificador el cual fue elegido al azar entre los n posibles decodificadores.

1. (1.5 pts.) De un espacio de probabilidad que modele la situación descrita.

2. (2.0 pts.) Se sabe que si un decodificador recibe mensajes provenientes de más de un emisor entonces se bloquea. Calcule la probabilidad de que ningún decodificador se bloquee.

3. (2.5 pts.) Si el i-ésimo decodificador es el único capaz de descifrar los mensajes enviados por el i-ésimo emisor, calcule la probabilidad de que los mensajes provenientes de más de $k \in \{1, \ldots, n\}$ emisores puedan ser descifrados.

SIN CONSULTAS.