MA-34A Probab. y Procesos Estocásticos	31 de Agosto, 1998

Control No. 1

Prof. Cátedra: M. Kiwi — *Prof. Auxiliar: G. Fuenzalida*

TIEMPO: 2 HRS 45 MIN.

PROBLEMA 1:

(i).- De un grupo de n personas se elige un comité de tamaño j de entre los cuales se elige un subcomité de tamaño $i \leq j$. Obtenga una igualdad combinatorial calculando, de dos formas distintas, el número de posibles elecciones de comités y subcomités.

(ii).- Un elevador parte del subterráneo de un edificio de N pisos con m personas y el operador del elevador. Las m personas se bajan en uno de los N pisos. ¿De cuantas formas distintas puede haber percibido el operador que las personas se bajaban del ascensor en los siguientes casos?

> (ii-1).- si el operador no es capaz de percibir diferencias entre las personas,
>
> (ii-2).- si m es un múltiplo de N, el operador sólo es capaz de distinguir entre hombres y mujeres, hay igual cantidad de hombres que de mujeres, la misma cantidad de personas se baja en cada piso, y en cada piso sólo se bajan hombres o sólo mujeres.

(iii).- Se realizan n lanzamientos independientes de una moneda que tiene probabilidad $p \in [0,1]$ de salir cara. De un modelo probabilista de la experiencia descrita y calcule la probabilidad de que se obtengan exactamente k caras en los n lanzamientos (indique claramente sus supuestos, el experimento, el espacio muestral y la medida de probabilidad).

PROBLEMA 2: El profesor K se encuentra preocupado por la posibilidad de copia en los controles de su curso, por lo que ha contratado dos expertos ayudantes que denominaremos A_1 y A_2. Al comienzo del curso el profesor K divide a los estudiantes en dos grupos de igual tamaño, le asigna al azar uno de los ayudantes a cada grupo, y decide mantener dicha distribución durante todo el semestre.

Se sabe que en el curso hay un estudiante, que denominaremos X, el cual siempre copia y cuya identidad es desconocida por el despistado profesor K y sus ayudantes. Suponga que la probabilidad de que el ayudante A_j detecte que X copia durante un control es q_j, donde $q_1 = \frac{1}{3}$ y $q_2 = \frac{1}{9}$.[1] Asuma que la detección o no de una copia durante un control es independiente de un control a otro aun sabiendo que A_j cuida a X.

(i).- (1.5 pts.) Especifique un espacio muestral Ω para la situación descrita asumiendo que durante un semestre normal el profesor K toma un número finito de controles. El espacio muestral Ω debe ser tal que dado $\omega \in \Omega$ se pueda determinar que ayudante se le asigno a X y en que controles se detecto si X copio.

[1] En otras palabras A_1 es más "chacal".

(ii).- (2.0 pts.) Calcule la probabilidad que el estudiante X haya sido asignado al ayudante A_j, $j \in \{1, 2\}$, si se detecta su copia en el primer control.

(iii).- (2.5 pts.) Calcule la probabilidad de que si a X se le detecta copiando por primera vez el n-ésimo control entonces X haya sido asignado al ayudante A_j. ¿Como se comportan ambas probabilidades como función de n? Comente.

PROBLEMA 3: En lo que sigue, sea $(\Omega, \mathcal{F})$ un espacio medíble dotado de la medida de probabilidad $\mathbb{P}$.

(i).- Sean $E_1, E_2, \ldots, E_n, \ldots \in \mathcal{F}$. Pruebe que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(E_n) ,$$

y concluya que si $\mathbb{P}(F_n) = 1$ para todo $n \geq 1$ entonces $\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} F_n\right) = 1$.

<u>Indicación</u>: Estudie $\lim_{m\to\infty} \sum_{n=1}^{m} \mathbb{P}(E_n)$.

(ii).- Pruebe que si $\mathbb{P}(A) = 1$ entonces para todo $B \in \mathcal{F}$ se tiene que A y B son independientes. Concluya que el mismo resultado se tiene en el caso que $\mathbb{P}(A) = 0$.

(iii).- Sean $E, F \in \mathcal{F}$ tales que $\mathbb{P}(E), \mathbb{P}(F) > 0$. Se dice que el evento F acarrea información negativa acerca de E, denotado $F \downarrow E$, si

$$\mathbb{P}(E/F) \leq \mathbb{P}(E) .$$

Pruebe o de un contraejemplo a las siguientes afirmaciones:

(iii.1).- Si $F \downarrow E$ entonces $E \downarrow F$.

(iii.2).- Si $F \downarrow E$ y $E \downarrow G$ entonces $F \downarrow G$.

SIN CONSULTAS.